204	Connexité. Exemples et applications.

I/ Généralités

1) Définition [Q] p105

Déf 1: Un espace topologique X est dit connexe s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

a) Si $X = O_1 \sqcup O_2$ avec O_1 et O_2 ouverts, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.

b) Si $X = F_1 \sqcup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.

c) Si $A \subset X$ et A ouvert fermé, alors $A = \emptyset$ ou $A = X$.

d) Toute application continue $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est constante.

Ex 2: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes, $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

2) Propriétés fondamentales

Prop 3: L'image d'un connexe par une application continue est un connexe.

Prop 4: Soient $(X_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques non vides et $X := \prod_{i \in I} X_i$ alors (X connexe) $\Leftrightarrow$ ($\forall i \in I, X_i$ connexe)

App 5: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ est connexe.

Prop 6: Si les A_i sont connexes dans X et $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Prop 7: A et B connexes $\not\Rightarrow$ $A \cap B$ connexe.

Prop 8: Soit A connexe, alors $A \subset B \subset \bar{A} \Rightarrow B$ connexe.

Déf 9: Une relation d'équivalence R sur un ensemble E est dite ouverte si $\forall a \in E, \exists V$ voisinage de $/ \forall x \in V, xRa$.

[P] p71-73

Thm 10: Si R est une relation d'équivalence ouverte sur un connexe E, alors E est la seule classe d'équivalence de R.

App 11: Tout ouvert connexe d'un evn est connexe par arcs.

App 12: Toute application localement constante sur un connexe est constante.

Rem: La convexité implique la connexité, la réciproque est vraie sur $\mathbb{R}$.

3) Composantes connexes

Déf 13: On définit une relation binaire $\sim$ dans X par $x \sim y \Leftrightarrow \exists C$ connexe de X avec $x, y \in C$.
C'est une relation d'équivalence sur X. On appelle les classes d'équivalence les composantes connexes de X.
On note $C(x)$ la composante connexe de x.

Prop 14: Les composantes connexes sont des parties fermées.

Prop 15: Un homéomorphisme h de X sur Y échange les composantes connexes de X et Y i.e. $h(C(x)) = C(h(x))$.

Déf 16: Un espace topologique est dit totalement discontinu si la composante connexe de tout point est réduite à ce point.

Ex 17: Un espace discret ; $\mathbb{Q}$.

II / Notions liées à la connexité

1) Connexité par arcs

Déf 18 : • On dit que deux points a et b peuvent être joints par un arc s'il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. [P] p73

• X est dit connexe par arcs si deux points quelconques peuvent être joints par un arc.

Thm 19 : La connexité par arcs entraîne la connexité.

La réciproque est vraie dans le cas d'un ouvert d'un evn.

Contre-ex 20 : L'adhérence du graphe de $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$

2) Connexité locale

Déf 21 : X est dit localement connexe si tout point de X admet un système fondamental de voisinages dont chacun est connexe.

Prop 22 : Les composantes connexes d'un espace localement connexe sont des ouverts.

Prop 23 : Connexe $\not\Leftrightarrow$ Localement connexe.

Ex 24 : Le peigne $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})$ est connexe mais n'est pas localement connexe. [H] p148

3) Connexité locale par arcs

Déf 25 : X est dit localement connexe par arcs si tout point de X admet un système fondamental de voisinages dont chacun est connexe par arcs.

Ex 26 : Un evn est localement connexe par arcs.

Prop 27 : Un espace à la fois connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.

III / Applications

1) Analyse réelle

Prop 28 : Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Thm 29 : Théorème des valeurs intermédiaires

Thm 30 : Théorème de Darboux. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

Prop 31 : Inégalité de Lochs : $\forall x > 0$, $\sin x \cos x < \operatorname{th} x$.

Prop 32 : Si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe d'un evn, et $f : \mathcal{U} \to F$ différentiable sur $\mathcal{U}$ avec $\forall x \in \mathcal{U}$, $Df(x) = 0$, alors f est constante sur $\mathcal{U}$.

Lem 33 : Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G contenant un voisinage de e. Alors H est ouvert et fermé.

Lem 34 : (Théorème de relèvement pour un compact étoilé)

Si K est un compact étoilé, alors on a $\mathcal{E}_K = \mathcal{C}_K$, où $\mathcal{C}_K$ est le groupe multiplicatif des fonctions continues de K dans $\mathbb{C}^*$, $\mathcal{E}_K$ le sous-groupe des exponentielles de fonctions continues de K dans $\mathbb{C}$.

Thm 35 : Théorème de Brouwer en dimension 2.

Toute application continue de D dans D admet un point fixe.

2) Groupes matriciels [MT] p17, 34

Prop 36 : • $GL_n(\mathbb{C})$ est une partie connexe de $M_n(\mathbb{C})$.

• $GL_n(\mathbb{R})$ admet 2 composantes connexes dans $M_n(\mathbb{R})$

• $O(n)$ a 2 composantes connexes homéomorphes, dont $SO(n)$.

Prop 37 : L'ensemble des projecteurs de rang p de $M_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Prop 38 : $SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

3) Analyse complexe

Prop 39 : Soit Ω un ouvert simplement connexe, l'intégrale de toute fonction holomorphe dans Ω le long de tout lacet tracé dans Ω est nulle.

Prop 40 : Soit γ un chemin fermé, soit Ω le complémentaire de $\mathrm{Im}(\gamma)$, on a alors

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$ est une fonction à valeurs entières qui est constante sur chaque composante connexe de Ω, et qui est nulle sur la composante connexe non bornée de Ω. [Ru] p197

Prop 41 : Théorème des résidus [BMP] p67.

[BMP] p73

Prop 42 : Si $\mathcal{U}$ est un ouvert connexe, alors $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ est un anneau intègre et $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ est son corps des fractions.

4) Homéomorphismes

La connexité est utile pour montrer que des ensembles ne sont pas homéomorphes

Prop 43 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes

5) Topologie algébrique

Prop 44 : Toute surface compacte, et connexe, est homéomorphe à S^2, à un tore à n trous, ou à une somme connexe de plans projectifs.

Prop 45 : Si X et Y sont 2 espaces connexes par arcs homéomorphes, alors $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$ sont isomorphes.

Bibliographie :

[Q] : Queffelec, Topologie

[P] : Pommellet, Cours d'analyse

[BMP] : Beck, Malick, Peyré, Objectif agrégation

[G] : Gourdon, Analyse

[MT] : Mneimé, Testard, Groupes de Lie classiques

[H] : Hauchecorne

[Ru] : Rudin