204 — Connexité. Exemples et Applications

[GOU] p39 **Cadre** : Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E. On munit A de la distance d induite sur A.

I) Généralités

1) Définitions

[GOU] p38 **Prop 1** Les assertions suivantes sont équivalentes.
i) Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts disjoints non vides
ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés disjoints non vides.
iii) Les seules parties ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.

p39 **Déf 2** Un espace métrique vérifiant l'une des assertions précédentes est dit connexe

Exemple 3 - $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes.
- $\mathbb{Z}$ n'est pas connexe : $\{x_0\}$ est ouvert et fermé

[QUE] p106 **Déf 4** On dit que A est connexe dans E si le sous-espace topologique A, muni de la topologie induite par celle de E est connexe.
$\Leftrightarrow \begin{cases} A \subset \omega_1 \cup \omega_2, \ \omega_j \text{ ouverts de } E \text{ et } \omega_1 \cap \omega_2 \cap A = \emptyset \\ \Rightarrow \omega_1 \cap A = \emptyset \text{ ou } \omega_2 \cap A = \emptyset \end{cases}$

p106 **Prop 5** (Lemme de passage des douanes)
Soit A une partie de E. Toute partie connexe C de E qui rencontre l'intérieur de A et l'extérieur de A rencontre aussi la frontière de A.

[GOU] p39 **C-ex 6** $\mathbb{Q}$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$ car si $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\mathbb{Q} \subset]-\infty, a[\cup]a; +\infty[$.

2) Propriétés

[QUE] p105 [GOU] p39 **Thm 7** Soit $f : (E,d) \longmapsto (E',d')$ une application continue.
Si E est connexe alors $f(E)$ est connexe
caractérisation des connexes E est connexe ssi toute application continue $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ est constante

[QUE] p106 [GOU] p40 **Appli 8** Soit E un espace connexe, g_1 et g_2 deux applications continues de E dans $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors :
1) $e^{2i\pi g_1} = e^{2i\pi g_2} \Rightarrow g_1 - g_2 =$ constante entière.
2) $g_1^n = 1 \Rightarrow g_1 =$ constante racine n-ième de l'unité.

p40 **Prop 9** Soit A une partie connexe de E. Si une partie B de E vérifie $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

Prop 10 Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E,d) telle que : $\exists i_0 \in I$, $\forall i \in I$, $C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset$
Alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

p40 **C-ex 11** $\{0\}$ et $\{1\}$ sont connexe dans $\mathbb{R}$ mais $\{0,1\}$ n'est pas connexe dans $\mathbb{R}$

p40 **Rq 12** Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de connexes telle que $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

p40 **Prop 13** Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable de connexes telle que pour tout $i \in I$, $i \neq 0$, $C_{i-1} \cap C_i \neq \emptyset$.
Alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.

[CHA] p396 **C-ex 14** Une intersection de connexe n'est pas toujours connexe :
$U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ est un connexe de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ aussi mais
$U \cap \mathbb{R} = \{-1, 1\}$ n'est pas connexe.

[GOU] p40 **Prop 15** Soient $(E_1,d_1), \dots, (E_n,d_n)$ des espaces métriques (en nombre fini). L'espace produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$ est connexe ssi E_i est connexe pour tout i

3) Exemple de connexe de $\mathbb{R}$.

[QUE] p112 **Thm 16** Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on a équivalence entre
a) A est connexe
b) A est un intervalle.

p112 **Thm 17** (théorème des valeurs intermédiaires)
Soit E un espace connexe et $f : E \to \mathbb{R}$ continue ; si f prend deux valeurs α et β, elle prend toute valeur γ intermédiaire entre α et β $(\alpha \leq \gamma \leq \beta)$

p112 Thm 18 (Brouwer en dimension 1)
Toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ possède un point fixe.
Application Théorème de Sarkowski

4) Composantes connexes

[QUE] p113 Déf 19 Soit la relation binaire $\sim$ dans E par :
$x \sim y \iff \exists\, C$ connexe de E, $x \in C$, $y \in C$.
Cette relation est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence de $\sim$ s'appellent les composantes connexes de X. On note $C(x)$ la classe d'équivalence de x.

Rq 20 Les composantes connexes forment une partition de E.

Rq 21 E est connexe $\iff$ il a 1 seule composante connexe.

p113 Prop 22 1) $C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x ; c'est aussi le plus grand connexe contenant x.
2) $C(x)$ est fermé dans E.

p113 Prop 23 Si $E = \bigsqcup_I w_i$ où les w_i sont ouverts connexes non vides, alors les w_i sont les composantes connexes de E.

Ex 24 : $E =]-\infty ; x[\cup]y ; +\infty[\quad x < y$

II) Connexité par arcs et par lignes brisées.

1) Définition et propriétés de la connexité par arcs

p109 Déf 25 Deux points a et b de E sont dits équivalents ($a \approx b$) s'il existe une application continue $f : [0,1] \to E$ telle que $f(0) = a$, $f(1) = b$; f s'appelle un chemin joignant a à b dans E.

[QUE] Déf 26 E est dit connexe par arcs si deux points quelconques a, b de E sont toujours équivalents, autrement dit s'il existe toujours un chemin joignant a à b dans E.

Ex 27 $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes par arcs.

p109 Thm 28 1) E connexe par arcs $\Rightarrow$ E connexe
2) La réciproque est vraie si E est un ouvert d'un evn.

Exemple 29 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, E son épigraphe alors E est connexe par arcs.

C-ex 30 : Soit Γ le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par : [GOU] p44
$$\Gamma = \Big[\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} (\{x\} \times \mathbb{R}^+)\Big] \cup \Big[\bigcup_{x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} (\{x\} \times]-\infty, 0[)\Big]$$
Γ est connexe mais pas connexe par arcs.

2) Application au groupe matriciel.

Prop 31 D'après le thm 28, les ouverts connexes de $M_n(\mathbb{K})$ sont connexes par arcs. [MT] p17

Prop 32 $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe

Prop 33 $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe donc connexe par arcs p17

Prop 34 L'ensemble des projecteurs de rang p de $M_n(\mathbb{C})$ est connexe

Thm 35 Soit $\exp : A \in M_n(\mathbb{C}) \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{C})$ $\boxed{\text{DVP}}$ [MdM] p49
Alors $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$

3) Connexité par lignes brisées.

Dans ce paragraphe E sera un evn

Déf 36 On appelle ligne brisée de E joignant deux points a et b de E tout ensemble de la forme [GOU] p42
$\bigcup_{1 \le i \le n} [x_i, x_{i+1}]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = a$ et $x_n = b$ et $\forall i$, $x_i \in E$

Déf 37 Une partie A de E est dite connexe par lignes brisées si pour tout $(a,b) \in A^2$, il existe une ligne brisée incluse dans A joignant a et b. p42

Prop 38 A convexe $\Rightarrow$ A connexe par lignes brisées
A connexe par lignes brisées $\Rightarrow$ A connexe par arcs
A connexe par arcs $\Rightarrow$ A connexe.

Thm 39 Une partie ouverte Ω de E est connexe si et seulement si elle est connexe par lignes brisées p42

C-ex En dimension 2. $\mathcal{C}(0,1)$ est connexe par arcs mais pas par lignes brisées

III) Applications

1) Analyse réelle

Thm 40 (Darboux) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. [GOU] p47

[ROU] p104 **Thm 41** Soient E et F deux espaces normés (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application différentiable en tout point de U. Soient $[a,b] \subset U$, $k \geq 0$. Si $\forall x \in [a,b]$, $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq k$. Alors on a l'inégalité de la moyenne
$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq k\|b-a\|_E$$
p105 **Corollaire 42** Si U est un ouvert connexe de E et si $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$ alors f

[GOU] p47 [AVE] p109 **Prop 43** Soient E et F deux ensembles. Soit h un homéomorphisme. h échange les composantes connexes de E et F. càd :
$$h(C(x)) = C(h(x)) \quad \forall x \in E$$
[Rud] p62 **C-ex 44** $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Appli 45 Le groupe $O_2(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes à $SO_2(\mathbb{R})$

2) Analyse complexe

[Rud] p242 **Déf 46** Un domaine est un ouvert non vide connexe du plan complexe

p247 **Thm 47** Soit γ un chemin fermé et Ω le complémentaire de $Im(\gamma)$. Soit $Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$ $(z \in \Omega)$

La fonction Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur Ω constante sur chaque composante connexe de Ω nulle sur la composante connexe non bornée de Ω.

p250 **Thm 48** Soit Ω un ouvert convexe, $p \in \Omega$, f continue sur Ω et $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. On a pour tout chemin fermé γ dans Ω $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

p250 **Thm 49** Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe Ω et soit $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega$ et $z \notin Im\,\gamma$, on a :
$$f(z)\,Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$
p251 **Thm 50** Soit Ω un domaine, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. $Z(f) = \{a \in \Omega, f(a) = 0\}$. Alors soit $f \equiv 0$ soit $Z(f)$ n'a pas de point d'accumulation et $Z(f)$ est au plus dénombrable

Coro 51 Si f et g sont des fonctions holomorphes sur un domaine Ω tq $\{z \in \Omega,\ f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation alors $f = g$. p252

Thm 52 Soit U un ouvert connexe et borné dans $\mathbb{C}$. Soit f une fonction continue sur $\bar{U}$ vérifiant la propriété de la moyenne $\left(f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt\right)$ sur U. [CAR] p72

Soit $M = \max_{\partial U} |f|$. Alors 1) $\forall z \in U$, $|f(z)| \leq M$
2) $\exists z_0 \in U$, $|f(z_0)| = M \Rightarrow f = cste$

Thm 53 (de l'image ouverte) [Rud] p257
Soit Ω un domaine, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ alors soit $f(\Omega)$ est un domaine soit c'est un point

3) Théorie des groupes

Thm 54 Si G/H et H sont connexes alors G est connexe [MT] p31

Thm 55 Le groupe $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe

Coro 56 Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes p34

Coro 57 Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

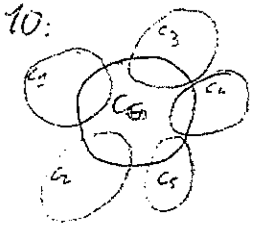
Thm 58 Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe ; le groupe $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes. p34

Appli 59 $SO_3(\mathbb{R})$ est simple $\boxed{\text{DVP}}$ [FGN Al3] p 67

Annexe.

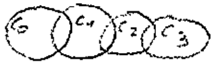
Prop 10:

$i_0 = 6$

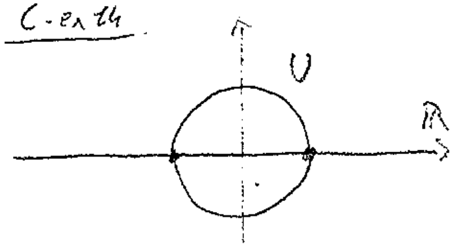


Rq 12

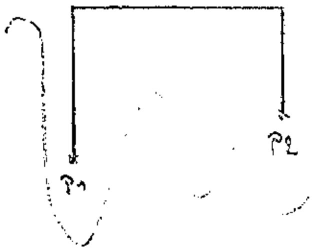
Prop 13



C-ex 14



Exemple 29



Réf : Par ordre d'apparition :

[GOU] : Gourdon Analyse

[QUE] : Queffelec ; Topologie

[HAU] : Hauchecorne, Les contre-exemples en maths

[M-T] : Mneimné - Testard : Groupes de Lie classiques

[MdM] : Maxime Zavidovique Un max de Maths

[ROU] : Rouvière, Petit guide de calcul différentiel

[Aud] : Audin : Géométrie

[Rud] : Rudin : Analyse réelle et complexe.

[OA] : Objectif Agrégation

Simplicité de SO_3

Camille FRANCINI - Laura GAY

Référence : FRANCINOU-GIANELLA-NICOLAS : Oraux X-ENS Algèbre 3 exercice 1.37 p.67 édition 2008 (+exo 1.33 p61 pour le bonus)

Rappels et notations

On note $O_3 := O_3(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ {}^tAA = \mathrm{Id}\} < GL_3(\mathbb{R})$.

Proposition 1

L'ensemble $SO_3 := SO_3(\mathbb{R}) = \{A \in O_3(\mathbb{R}) \ / \ \det(A) = 1\}$ est un groupe, il est distingué dans O_3. C'est l'ensemble des rotations de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

On notera sous forme multiplicative la composée de deux éléments de SO_3

Proposition 2

Soit $A \in SO_3$. Alors il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ tel que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

On a également que SO_3 est une partie de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ muni de sa topologie d'evn.

Démonstration

Soit G un sous-groupe distingué de SO_3, et soit G_0 la composante connexe par arcs dans G de l'identité.

Lemme

Si de plus G est connexe par arcs et non réduit à $\{\mathrm{Id}\}$ alors $G = SO_3$.

Preuve :

On va montrer que G contient un retournement (une rotation d'angle π). On en déduira alors que $G = SO_3$.
• Soit $g \in SO_3$. On note θ_g l'angle de cette rotation[1]. Nous savons qu'il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_g & -\sin\theta_g & 0 \\ \sin\theta_g & \cos\theta_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que $\mathrm{tr}(g) = 1 + 2\cos\theta_g$, donc l'application

$$\phi : \begin{array}{ccl} SO_3 & \longrightarrow & [-1, 1] \\ g & \longmapsto & \cos\theta_g = \dfrac{\mathrm{tr}(g) - 1}{2} \end{array}$$

est bien définie et continue. Il suffit de montrer que ϕ prend la valeur -1 pour avoir une rotation $g \in G$ d'angle π. Cependant, avec l'argument de connexité il va être plus facile de trouver un élément de G d'angle θ tel que $\cos\theta = 0$. Autrement dit, nous allons prouver que G contient une rotation r d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$. Alors r^2 sera un élément de G d'angle π.

• Cherchons pour commencer un élément $s \in G$ tel que $\phi(s) = \cos\theta_s \leqslant 0$.

1. θ_g est défini au signe près car si l'on change l'orientation de l'axe de la rotation, l'angle est changé en son opposé

Par hypothèse, G possède un élément g différent de Id. Quitte à changer la direction de l'axe de la rotation, on peut supposer que $\theta_g \in]0, \pi]$.
Si $\cos \theta_g \leqslant 0$ ie $\theta_g \in [\pi/2, \pi]$ alors $s = g$ convient.
Sinon, $\theta_g \in]0, \frac{\pi}{2}$ et on pose $N = E\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)$. On a

$$N\theta \leqslant \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta \leqslant \frac{\pi}{2} + \theta \leqslant \pi,$$

donc g^{N+1} est une rotation d'angle $(N+1)\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$ donc $s = g^{N+1}$ convient.

- Puisque G est connexe par arcs, il existe un chemin γ de G reliant Id à s. L'application

$$\varphi = \phi \circ \gamma : t \in [0,1] \mapsto \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\gamma(t)) - 1)$$

est continue puisque tr et γ le sont.
De plus, $\varphi(0) = \cos 0 = 1$ et $\varphi(1) = \cos \theta_s \leqslant 0$ par construction de s.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. La rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle de $\pm\frac{\pi}{2}$ et $R = r^2 \in G$ un angle de π et donc R est donc un retournement et appartient à G.

- Montrons qu'alors $G = SO_3$. Pour tout $g \in SO_3$, l'élément gRg^{-1} est dans G car G est distingué par hypothèse. De plus, $\mathrm{tr}(gRg^{-1}) = \mathrm{tr}(R)$ donc gRg^{-1} est aussi un retournement. SoitΔ l'axe de R. Soit u un vecteur appartenant à Δ, alors $(gRg^{-1})(g(u)) = g(u)$ donc gRg^{-1} est le retournement d'axe $g(\Delta)$. Or étant donné une droite D de $\mathbb{R}^3$, il est toujours possible[2] de trouver une rotation g telle que $D = g(\Delta)$ en prenant un axe orthogonal à D et Δ et un angle bien choisi[3] Ainsi, G contient tous les retournements. Or SO_3 est engendré par les retournements, ce qui conclut. ■

Preuve de la simplicité de SO_3 :

Étape 1 : Montrons que G_0 est un sous-groupe de SO_3.[4]

Par définition G_0 contient l'identité. Soient g et h deux éléments de G_0. Comme G_0 est connexe également, il existe γ et γ' des chemins de G_0 reliant Id à g et h respectivement. Considérons l'application

$$\gamma'' : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & \gamma(t)(\gamma'(t))^{-1} \end{array}$$

Déjà, l'application est bien définie car pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)(\gamma'(t))^{-1} \in G$ (G sous-groupe de SO_3).
De plus, l'application $g \mapsto g^{-1}$ est une application continue sur SO_3 car si l'on identifie un élément g de SO_3 à sa matrice dans la base canonique, les coefficients de g^{-1} dépendent polynomialement des coefficients de g.
Enfin, $\gamma''(0) = \mathrm{Id}$ et $\gamma''(1) = gh^{-1}$. Ainsi, γ'' est bien un chemin de G reliant Id à gh^{-1} donc $gh^{-1} \in G_0$[5] donc $G_0 < G$.

Etape 2 : Montrons que $G_0 \lhd SO_3$[6]

Soit $g \in G_0$, γ un chemin de G reliant Id à g et soit $h \in SO_3$. Considérons l'application

$$\gamma' : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & h\gamma(t)h^{-1} \end{array}$$

2. C'est en fait l'action transitive de SO_3 sur les droites de $\mathbb{R}^3$
3. N'oublions pas ici que les droites sont vectorielles donc passent toutes par 0.
4. Autre version : L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} G_0 \times G_0 & \longrightarrow & G \\ (x,y) & \longmapsto & xy^{-1} \end{array}$ est continue, et $G_0 \times G_0$ étant connexe, on en déduit que l'image de φ est un connexe de G. De plus elle contient l'identité, donc est incluse dans G_0, ce qui montre que G_0 est un sous-groupe de G.
5. Ici, le livre ne prend pas la même définition de composante connexe que celle de notre plan mais cela marche quand même sans soucis. En effet l'ensemble $\gamma''([0,1])$ est un connexe par arcs qui contient Id il est donc inclus dans la composante connexe de Id qui est G_0. Donc $\gamma''(1) \in G_0$.
6. Autre version : Soit $h \in SO_3$, alors l'application

$$\mathrm{Int}_h : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & hgh^{-1} \end{array}$$

est bien définie. Le même argument que plus haut montre que Int_h envoie G_0 dans G_0, et ce pour tout $h \in SO_3$, ce qui signifie que G_0 est un sous-groupe distingué de SO_3.

Déjà, l'application est bien définie car comme $G \lhd SO_3$, pour tout $t \in [0,1]$, $h \underbrace{\gamma(t)}_{\in G} h^{-1} \in G$.

L'application γ est continue de même que la multiplication à droite ou à gauche par un élément de SO_3, donc γ' est continue.
Enfin, on a $\gamma'(0) = \mathrm{Id}$ et $\gamma'(1) = hgh^{-1}$. L'application γ' est bien un chemin de G reliant Id et hgh^{-1} donc $hgh^{-1} \in G_0$ et ainsi $G_0 \lhd SO_3$.

Étape 3 : Montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$ ou $G = SO_3$.

- Si $G_0 \neq \{\mathrm{Id}\}$, on peut appliquer le **Lemme** car par définition et par l'étape 2, G_0 est un sous-groupe distingué et connexe par arcs. Donc, $G_0 = SO_3$, donc a fortiori $G = SO_3$.
- Si $G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ alors montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$, ce qui terminera la preuve.
- Remarquons que dans ces conditions, toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons. En effet, si g' est dans la composante connexe par arcs de g relié par le chemin γ, alors $t \mapsto g^{-1}\gamma(t)$ est un chemin de G reliant Id à $g^{-1}g'$. Ainsi, $g^{-1}g' \in G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ donc $g' = g$ et donc toutes les composantes connexes par arc de G sont des singletons.
- Raisonnons par l'absurde et supposons que G contienne un élément $g \neq \mathrm{Id}$. Soit h une rotation quelconque, différente de Id et d'angle θ_h.
Pour tout $t \in [0,1]$, on note h_t la rotation de même axe et d'angle $t\theta_h$.
L'application $t \mapsto h_t$ est continue car matriciellement elle se traduit dans une certaine base orthonormale par
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\theta_h) & -\sin(t\theta_h) & 0 \\ \sin(t\theta_h) & \cos(t\theta_h) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Ainsi, l'application $t \in [0,1] \mapsto h_t g h_t^{-1}$ est un chemin de G (car G est distingué), d'origine g et d'extrémité hgh^{-1}. Ainsi, hgh^{-1} appartient à la composante connexe par arc de g qui est un singleton et donc $hgh^{-1} = g$.
Or, si g est une rotation d'axe Δ, hgh^{-1} est une rotation d'axe $h(\Delta)$ donc $h(\Delta) = \Delta$ C'est impossible : une droite ne peut pas être invariante par toutes les rotations de l'espace ! Ainsi $G = \{\mathrm{Id}\}$ ce qui montre la simplicité de G.

■

Bonus

Proposition 3

SO_3 est engendré par les retournements.

<u>Preuve :</u>
Soit $u \in SO_3 \backslash \{\mathrm{Id}\}$. Comme $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ est de dimension 1 (c'est une droite, l'axe de u), on a $\mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}) = 2$. Ainsi[7], u s'écrit comme produit de 2 réflexions : $u = s_1 \circ s_2$. Or, si H est un plan de E et s est la réflexion par rapport à H, alors $-s$ est le retournement par rapport à la droite $D = H^{\perp}$. La relation $u = (-s_1) \circ (-s_2)$ montre que u est la composée de 2 retournements. Donc les retournements engendrent SO_3. ■

<u>Notes :</u>

✓ Rappels : un sous-groupe H est distingué dans un groupe G si $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

7. On admet que si $u \in O_3$, u peut s'écrire comme produit de r réflexions où $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id})$.

Surjectivité de l'exponentielle

Laura GAY - Camille FRANCINI

Référence : Maxime ZAVIDOVIQUE : Un Max de Math, Calvage & Mounet, 2013 p. 49 et p.53

Théorème

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. En particulier, la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Preuve du théorème

1. Préliminaire : Montrons déjà que $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. "$\subset$" est triviale. Soit $X \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$. Alors X^{-1} est un polynôme en X (avec Cayley-Hamilton par exemple) [1]. Donc a fortiori, X^{-1} est un polynôme en A donc $X \in \mathbb{C}[A]^\times$.

2. $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ (*servira pour le TIL*). En effet, $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \underbrace{\det{}^{-1}(\mathbb{R}^*)}_{\text{ouvert}}$.

3. $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe. On montre pour cela qu'il est connexe par arcs.
Soit $M, N \in \mathbb{C}[A]^\times$, alors $P(z) := \det(zM + (1-z)N)$ est un polynôme non nul (car $P(0) = \det(N) = 1$) donc l'ensemble Z de ses racines est fini. $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs et contient 0 et 1 donc il existe un chemin γ reliant 0 à 1 dans $\mathbb{C} \setminus Z$. Le chemin $\gamma(t)M + (1-\gamma(t))N$ relie alors N à M dans $\mathbb{C}[A]^\times$.

4. Montrons que l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C}[A], +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}[A]^\times, \cdot) \\ X & \longmapsto & \exp(X) \end{array}$$
est bien définie et est un morphisme de groupes.
$\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension finie [2] donc est fermé.
Or, si $X \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(X) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} X^k$ est une limite de polynômes en A donc d'éléments de $\mathbb{C}[A]$, donc $\exp(X) \in \mathbb{C}[A]$.
Par ailleurs, $\exp(X) \in GL_n(\mathbb{C})$ car d'inverse $\exp(-X)$, donc l'application est bien définie.
C'est un morphisme de groupes car les éléments de $\mathbb{C}[A]$ commutent, et $\mathbb{C}[A]$ stable par produit.
Ainsi, $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$. But : montrer que c'est un ouvert fermé du connexe $\mathbb{C}[A]^\times$.

5. φ est de classe C^1 car $\exp(X)$ l'est.

6. La différentielle en 0 de φ est donc l'identité qui est bijective. De plus, $\mathbb{C}[A]^\times$ est ouvert (vu précédemment) donc, d'après le théorème d'inversion locale, φ réalise un C^1-difféomorphisme entre un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}[M]$ et un voisinage V de I_n dans $\mathbb{C}[M]^\times$. En particulier, $V = \exp(U) \subset \exp(\mathbb{C}[A])$.

7. Montrons que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$. Pour cela, on va montrer que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est voisinage de chacun de ses points.
Si $B \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(B + U) = \exp(B)V$.
Comme $\exp(B)$ est inversible, la multiplication par cette matrice est un difféomorphisme donc est continue. Ainsi, $\exp(B)V$ est un ouvert et donc un voisinage de $\exp(B)$. Or $\exp(B)V \subset \exp(\mathbb{C}[A])$ (vu précédemment). Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage de chacun de ses points. Donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$.

---

1. Ou plus simplement : Soit μ_M le polynôme minimal d'une matrice M inversible. Supposons que son coefficient constant est nul. Alors μ_M peut s'écrire $\mu_M = XQ$. Comme M est inversible, $\mu_M(M) = MQ(M) = 0$ donc $Q(M) = 0$. Absurdité du polynôme minimal. Donc nécessairement $\mu_M = a_0 + XQ$ avec a_0 non nul. On a donc $M^{-1} = -\frac{1}{a_0} Q(M)$

2. La dimension de $\mathbb{C}[A] \simeq \mathbb{C}[X]/(\mu_A(X))$ est exactement le degré du polynôme minimal $\mu_A(X)$ de A.

8. Montrons maintenant que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un fermé de $\mathbb{C}[A]$. On a (par double inclusion assez facile) :

$$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])} M \exp(\mathbb{C}[A])$$

L'ensemble $\exp(\mathbb{C}[A])$ est donc fermé, puisque les ensembles $M\exp(\mathbb{C}[A])$ sont ouverts (car toujours $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert et la multiplication par un inversible est un difféomorphisme...).

9. Bilan : $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé et ouvert dans le connexe $\mathbb{C}[A]^\times$. Comme $\exp(\mathbb{C}[A])$ est non vide, on a $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$. On a donc, pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. Donc la surjectivité de l'exponentielle. ■

Proposition

On a $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2,\ A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Preuve de la Proposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\exp(M) = A$, alors $\left(\exp\left(\frac{M}{2}\right)\right)^2 = A$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ appartenant à l'ensemble de droite. Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$. D'après le théorème, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ telle que $\exp(P(C)) = C$. Or, comme C est réelle, $C = \overline{C} = \exp(\overline{P}(C))$, donc $A = C \times \overline{C} = \exp(P(C) + \overline{P}(C))$ car $P(C)$ et $\overline{P}(C)$ commutent. Or $P + \overline{P} \in \mathbb{R}[X]$, donc la matrice A est bien l'exponentielle d'une matrice réelle. ■

Contre-exemple

$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par exp. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B) = A$, alors si λ est valeur propre de B, $\exp\lambda$ est valeur propre de A donc $\lambda = i\pi + 2ik\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\lambda \neq \bar{\lambda}$, or B est réelle donc $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de B, donc B est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable, ce qui est absurde.

On pouvait aussi donner une matrice de déterminant négatif, car $\det\exp(B) = \exp(\mathrm{tr}(B)) > 0$ pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notes :

✓ Rappel : Théorème d'inversion locale. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que la matrice jacobienne $\mathrm{D}f(a)$ est inversible i.e. $\det \mathrm{D}f(a) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ qui contient a et un ouvert W qui contient $f(a)$, tels que $f|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur $W = f(V)$.