204

Connexité. Exemples et applications

I. ESPACES CONNEXES

1. Connexité

[Q,106]

Déf 1 : Soit X espace topologique. On a équivalence entre :
i) Si $X = O_1 \sqcup O_2$, O_i ouvert, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$
ii) Si $X = F_1 \sqcup F_2$, F_i fermé, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$
iii) Les seules parties ouvertes et fermées de X sont $\emptyset$ et X.
Dans ce cas, on dit que X est <u>connexe</u>

Ex 2 : $\mathbb{R}$ est connexe

Prop 3 : X est connexe $\iff$ toute application continue $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est constante

Généralisation 4 : Si X est connexe et $\varphi : X \to Y$ continue localement constante, alors φ est constante.

Déf 5 : $A \subset X$ est une <u>partie connexe</u> si elle est connexe pour la topologie induite

Ex 6 : $[0;1]$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$

Contre-ex 7. $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$.

[Dal,114]

Déf 8 : Si X espace topologique, $M, N \subset X$ sont dites <u>séparées</u> si
$(\overline{M} \cap N) \cup (M \cap \overline{N}) = \emptyset$

Prop 9. Les parties connexes de X sont les $A \subset X$ tels que $A = M \cup N$, M, N séparés $\implies M = \emptyset$ ou $N = \emptyset$

[Q,106]

Thm 10 : Si $A \subset X$, toute partie connexe de X rencontrant l'intérieur et l'extérieur $X \setminus \overline{A}$ de A rencontre ∂A.

Ex 11 : les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont convexes, i.e. des intervalles.

Prop 12 : Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur X dont toutes les classes sont ouvertes, alors il n'y a qu'une classe d'équivalence.

courac

2. Stabilité

[Q,106]

Thm 13 : Si X connexe et $f : X \to Y$ continue, $f(X)$ est connexe.

Application 14 : théorème des valeurs intermédiaires.

Prop 15 : • Une union de connexes dont l'intersection est non vide est connexe.
• $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ muni de la topologie produit est connexe $\iff \forall n$, X_n connexe

Prop 16 : L'adhérence d'un connexe est connexe

Contre-ex 17 :  $A^c \cap B$ n'est pas connexe.

3. Composantes connexes

[Q,105]

Déf 18 : Si X espace topo, la composante connexe de $x \in X$ est $C(x) = \bigcup_{\substack{x \in C \\ C \text{ connexe}}} C$. C'est le plus grand connexe contenant x.

Ex 19 : • Rayman a 6 composantes connexes
• L'hyperbole dans $\mathbb{R}^2$ d'équation $xy = 1$ en a deux.

Prop 20 : Les composantes connexes de X sont fermées, 2 à 2 disjointes

courac

[Dal,119]

Thm 21 : • Si $X = \bigsqcup_{j \in J} O_j$ où O_j ouvert connexe, alors les O_j sont les composantes connexes de X
• Si $X = \bigsqcup_{j \in J} F_j$ où J <u>fini</u>, F_j fermé connexe, les F_j sont les composantes connexes de X

[Dal,119]

Application : Thm de Sierpiński (22) : un espace métrique compact connexe ne peut être décomposé en une famille infinie dénombrable de fermés disjoints deux à deux.

Prop 23 : Un homéomorphisme $h : X \to Y$ envoie une composante connexe de X sur une composante connexe de Y.

[Q,204]

Thm de Jordan 24 (admis). Une courbe fermée simple γ d'image J est telle que J^c a deux composantes connexes : une bornée C_0 et une non bornée C_∞ et $\partial C_0 = \partial C_\infty = J$.

4. Connexité par arcs (en pratique on [illegible])

[Q,107]

Déf 25 : X est connexe par arcs (cpa) si $\forall a, b \in X$, $\exists \gamma : [0;1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$

Prop 26 : convexe $\implies$ étoilé $\implies$ cpa $\implies$ connexe

[Q,128] Ex 27 : S^n est cpa

Contre-ex 28 : L'adhérence de $\{(x,\sin(\frac{1}{x})), x>0\}$ dans $\mathbb{R}$ est connexe mais pas cpa.

Application 29 : les cpa de $\mathbb{R}$ sont les intervalles

Prop 30 : Si D est un ensemble dénombrable, $D\subset\mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2\setminus D$ est connexe par arcs

[Q,117] Prop 31 : Si Ω ouvert d'un evn, Ω cpa $\Rightarrow$ Ω connexe

II. PROLONGEMENT PAR CONNEXITÉ

1. Application à l'analyse réelle

Thm 32 [Hadamard-Lévy] : soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ de classe C^2, de différentielle inversible en chaque point et telle que $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$. Alors f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

[Q,126] Prop 33 (unicité globale de Cauchy-Lipschitz) : soit $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$, $(t,y_1,\dots,y_n)\mapsto f(t,y)$ continue et localement lipschitzienne en y. Si y_1 et y_2 vérifient $\begin{cases} y_i' = f(t,y_i) \ \forall t\in I \\ y_i(t_0)=y_0 \end{cases}$ alors $y_1=y_2$ sur I, si I intervalle.

Thm 34 (Darboux) : si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et I intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. [C,392]

2. Analyse complexe

[Q,125] Prop 35 : Soit γ courbe fermée C^1 par morceaux d'image γ^*. Alors $\mathrm{Ind}_\gamma : a\mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$ est constante à valeurs entières sur chaque composante connexe de $(\gamma^*)^c$.

[Rud,250] Application : Thm 36 (formule de Cauchy) : Soit Ω ouvert convexe, γ courbe fermée dans Ω, f holomorphe sur Ω, alors si $z\in\Omega$ et $z\notin\gamma^*$, $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$

Prop 37 : Soit Ω ouvert connexe et $f\in H(\Omega)$. L'ensemble des zéros de f dans Ω est $Z(f)=\Omega$ ou bien est un ensemble sans point d'accumulation, au plus dénombrable. [Rud 251]

Coro 38 (unicité du prolongement analytique) Si f,g sont holomorphes sur Ω ouvert connexe, et coïncident sur un ensemble contenant un point d'accumulation, alors $f=g$ sur Ω.

Application 39 : la fonction $\zeta : s\mapsto \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ définie sur $\{Re(s)>1\}$ admet un unique prolongement holomorphe à $\{Re(s)>0\}\setminus\{1\}$

3. Théorème du relèvement continu et applications

Thm 40 : Soit $\gamma : [a;b]\to\mathbb{U}$ une application continue. Il existe une unique application $\theta : [a;b]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\forall t\in[a;b]$, $\gamma(t)=e^{i\theta(t)}$. θ est appelé relèvement de γ. DVP 1

Coro 41 [Borsuk-Ulam] : Si $f : S^2\to\mathbb{R}^2$ est continue, alors il existe $w\in S^2$ tel que $f(w)=f(-w)$

Ex : à temps fixé, il existe deux points antipodaux sur la Terre qui ont même température et même pression.

Coro 42 [Brouwer] : si $f : \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ est continue ($\mathbb{D}$ disque unité de $\mathbb{C}$), alors f admet un point fixe.

III. UN AUTRE POINT DE VUE : CONNEXITÉ DANS LES ESPACES DE MATRICES

1. Groupes de matrices topologiques

Def 43 : Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie séparée pour laquelle $g\mapsto g^{-1}$ et $(g,h)\mapsto g\times h$ sont continues [MT,28]

Ex 44 : pour toute norme sur $M_n(\mathbb{C})$ $\{M_n(\mathbb{R})\}$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes topologiques.

[MT, 33] Prop 45 : Si G est un groupe topologique, H sous-groupe connexe tel que G/H est connexe, alors G est connexe

Thm 46 : • $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert cpa

• $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes (par arcs) $GL_n^+(\mathbb{R}) \supset SL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) / \det M < 0\}$.

• $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

• $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, c'est l'une des composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$

[CG, 30] Ex 47 : L'ensemble des projecteurs P de $M_n(\mathbb{C})$ a $n+1$ composantes connexes qui sont les $P_r = \{$projecteurs de rang $r\}$, pour $0 \leq r \leq n$

2. Utilisation de la connexité en algèbre linéaire

[Dvp 2] Thm 48 . Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

• $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective

Prop 49 : L'image de $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ est $\{A^2 / A \in GL_n(\mathbb{R})\}$

Application 50 (admis)

[MT, 64-68] Thm [Cartan - Von Neumann] : tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété réelle de $GL_n(\mathbb{C})$.

Thm 51 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Références : [Q] : Hervé Queffélec, Topologie

[Dol] : Szymon Dolecki, Analyse fondamentale

[Col] : Pierre Colmez, Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)

[Rud] Walter Rudin, Analyse réelle et complexe

[CG] : Caldero - Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométrie

[MT] Mneimné - Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques

(Antoine Diez, Gabriel Lepetit)

Rapport Jury (2015)

Rôle clef : connexité, passage local -> global

Présenter des résultats naturels dont la démo utilise la connexité (ex : démos d'Alembert - Gauss)

distinguer connexité et connexité par arcs et préciser les situations où les deux coïncident

Peut être ajouté : espaces bien enchaînés

$\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C})$ EST SURJECTIVE

Théorème. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Alors, $\exp(\mathbf{C}[A]) = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$. En particulier, $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C})$ est surjective et un antécédent de $A \in GL_n(\mathbf{C})$ est un polynôme (complexe) en A.*

PREUVE. *Étape 1 : quelques résultats préliminaires.*

- On commence par observer l'égalité $\mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$ où $\mathbf{C}[A]^\times$ est le groupe des inversibles de $\mathbf{C}[A]$. Seule l'inclusion $\supset$ pose question : il s'agit de voir que l'inverse d'une matrice M est un polynôme en M (en effet le coefficient constant de son polynôme minimal est non nul : $\mu_M = \alpha + XP$ et $M^{-1} = -P(M)/\alpha$). Ainsi, l'inverse d'un élément de $\mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C})$ reste dans $\mathbf{C}[A]$ (c'est un polynôme de polynôme en A)
- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $\exp(M) \in \mathbf{C}[M]$: en effet, c'est une limite dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ (pour la norme d'algèbre) d'éléments de $\mathbf{C}[M]$ qui est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc fermé. En conséquence,
$$\exp : \mathbf{C}[A] \to \mathbf{C}[A]^\times$$
est un morphisme de groupes.
- $\mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap \det^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est un ouvert de $\mathbf{C}[A]$. Il est aussi connexe par arcs (donc connexe) car si $M, N \in \mathbf{C}[A]^\times$, la fonction
$$z \in \mathbf{C} \mapsto \det(zM + (1-z)N)$$
est polynomiale en z et non nulle donc admet un nombre fini de zéros. 0 et 1 ne sont pas des zéros de ce polynôme donc on peut construire une courbe $z(t) \in \mathbf{C}$ reliant 0 et 1 en évitant ces zéros[1]. Ainsi
$$t \in [0,1] \mapsto z(t)M + (1 - z(t))N$$
est une courbe tracée dans $\mathbf{C}[A]^\times$ reliant continûment N et M.

Étape 2 : exp *est localement un difféomorphisme*

Comme la différentielle de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to GL_n(\mathbf{C})$ en 0 est l'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a aussi en restreignant $\exp : \mathbf{C}[A] \to \mathbf{C}[A]^\times$:
$$d\exp(0) = id_{\mathbf{C}[A]}.$$
En particulier cette différentielle est bijective et le théorème d'inversion locale assure l'existence de deux ouverts $\mathcal{U} \subset \mathbf{C}[A]$ et $\mathcal{V} \subset \mathbf{C}[A]^\times$ contenant respectivement 0 et Id tel que $\exp : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ soit un difféomorphisme. Comme exp est un morphisme de groupes, le résultat demeure au voisinage de chaque point $M \in \mathbf{C}[A]$:
$$\exp : M + \mathcal{U} \to \exp(M)\mathcal{V}$$
est un difféomorphisme.

[1]On montre même que $\mathbf{R}^2 \setminus D$ où D est dénombrable est connexe par arcs

Étape 3 : un argument de connexité pour conclure.

L'étape 2 implique en fait que $\exp(\mathbf{C}[A])$ est un ouvert de $\mathbf{C}[A]^\times$. Mais c'est aussi un fermé en remarquant que

$$\mathbf{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbf{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbf{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbf{C}[A])} M \exp(\mathbf{C}[A])$$

(l'inclusion $\supset$ se prouve par contraposée). En vertu de la connexité de $\mathbf{C}[A]^\times$, on conclut que

$$\exp(\mathbf{C}[A]) = \mathbf{C}[A]^\times = \mathbf{C}[A] \cap GL_n(\mathbf{C}).$$

$\square$

Une application

Proposition. *L'image par l'application exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble*

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \{A^2,\ \ A \in GL_n(\mathbf{R})\}.$$

Preuve.
$\subset$: Il suffit de remarquer que $\exp(M) = \exp(\frac{1}{2}M)^2$
$\supset$: Soit $M = A^2$ où $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Il existe un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$. Comme A est réelle, on a aussi $\exp(\overline{P}(A)) = \overline{A} = A$ et donc

$$\exp((P + \overline{P})(A)) = A^2 = M.$$

$\square$

Référence. Zavidovique

Le théorème de relèvement continu

Théorème (Relèvement continu). *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\theta_0 \in \mathbf{R}$. On considère $\gamma : [a,b] \to \mathbf{U}$ une application continue telle que*

$$\gamma(a) = e^{i\theta_0}.$$

Alors il existe une unique application continue $\theta : [a,b] \to \mathbf{R}$ envoyant a sur θ_0 telle que

$$\forall t \in [a,b], \;\; \gamma(t) = e^{i\theta(t)}. \tag{1}$$

Une application continue $[a,b] \to \mathbf{U}$ vérifiant (1) s'appelle un relèvement continu de γ. Le lemme suivant sera important :

Lemme 1. *Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{R}(\gamma)$. Alors la fonction $\theta_1 - \theta_2$ est une constante appartenant à $2\pi\mathbf{Z}$.*

Preuve. On a pour tout $t \in I$, $\theta_1(t) - \theta_2(t) \in 2\pi\mathbf{Z}$ par définition d'un relèvement. Puisque θ_1 et θ_2 sont des relèvements continus et que l'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs, la conclusion est immédiate. □

En particulier, si on relève γ sur deux sous-intervalles de $[a,b]$ d'intersection non vide, il est possible de prolonger de façon unique chacun de ces relèvements à la réunion des deux sous-intervalles.

Preuve (du théorème de relèvement continu). L'unicité d'un tel relèvement découle du lemme 1[1]. Bien qu'il n'existe pas de fonction argument qui soit continue sur tout $\mathbf{C}^*$, il est facile d'en construire une sur n'importe quel plan fendu $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- e^{i\alpha}$. Cette remarque permet de construire pour tout $t \in I$ un relèvement local de γ restreint à un voisinage de t. La preuve consiste ensuite à globaliser la construction par connexité.

Étape 1. Soit $t \in I$. Par continuité de γ, il existe un intervalle ouvert $I_t \subset [a,b]$ contenant t et tel que $\gamma(I_t) \subset \mathbf{U} \setminus \{-\gamma(t)\}$. Sur le plan fendu $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-\gamma(t)$, on définit une fonction argument continue $\Theta_{\gamma(t)} : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-\gamma(t) \to \mathbf{R}$. $\Theta_{\gamma(t)} \circ \gamma$ est un relèvement continu de $\gamma|_{I_t}$.

Étape 2. On définit sur $[a,b]$ la relation $t \sim t'$ si et seulement s'il existe un sous intervalle de I contenant t et t' sur lequel γ se relève continûment[2]. Cette relation est clairement symétrique, elle est réflexive grâce à l'étape 1 et comme on peut prolonger les relèvements elle est aussi transitive. C'est donc une relation d'équivalence. De plus, toujours grâce à l'étape 1, il est facile de voir que les classes de $\sim$ sont ouvertes. Par connexité de $[a,b]$, il n'y a qu'une seule classe qui est $[a,b]$ tout entier. En particulier $a \sim b$ et le théorème est prouvé. □

[1] Puisque $\mathbf{R}$ est un revêtement de $\mathbf{U}$ via $\theta \mapsto e^{i\theta}$, c'est aussi un cas particulier du théorème d'unicité des relèvements en topologie algébrique, qui se prouve aussi par un argument de connexité !

[2] *i.e.* la restriction de γ à ce sous-intervalle admet un relèvement continu

Application : l'Antipodensatz de Borsuk

Definition 1 (Degré d'un lacet, d'une application). *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}^*$ un lacet. On appelle degré de γ l'entier*

$$\frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi}$$

où θ est un relèvement quelconque de $\gamma/|\gamma|$. On définit le degré d'une application continue $f : \mathbf{U} \to \mathbf{C}^*$ comme le degré du lacet :

$$\tilde{f} : t \in [-\pi, \pi] \mapsto f(e^{it}).$$

Lemme 2 (Le degré est localement constant). *Soient γ_1 et γ_2 deux lacets tracés sur $\mathbf{C}^*$. Si $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty < \|\gamma_1\|_\infty$ alors γ_1 et γ_2 ont même degré.*

Preuve. La condition implique que $\|\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1\|_\infty < 1$. Donc le lacet γ_2/γ_1 est tracé dans le plan fendu $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et est donc de degré nul. Et il est facile de voir que

$$\deg(\gamma_2/\gamma_1) = \deg(\gamma_2) - \deg(\gamma_1).$$

□

Théorème (Antipodensatz de Borsuk). *Soit $g : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^2$ une application continue. Alors il existe un point $\omega \in \mathbf{S}^2$ tel que $g(\omega) = g(-\omega)$.*

Preuve. On définit les applications continues $p : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{S}^2$ par :

$$\forall z \in \overline{\mathbf{D}},\ \ p(z) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \sqrt{1 - \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2})$$

et $f : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{R}^2$ par :

$$\forall z \in \overline{\mathbf{D}},\ \ f(z) = g(p(z)) - g(-p(z)).$$

La restriction de p à $\mathbf{U}$ est impaire, tout comme celle de f. Avec les notations précédentes, cela signifie que pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $\tilde{f}(t+\pi) = -\tilde{f}(t)$. Cela entraîne facilement que le degré de f est impair.
Si f ne s'annulait pas sur $\overline{\mathbf{D}}$, alors considérons l'homotopie

$$H(s,t) := f(se^{it})/|f(se^{it})|$$

qui est une fonction continue en s et en t. Ainsi, $s \mapsto \deg(H(s,\cdot))$ est continue. Comme elle est à valeurs dans $\mathbf{Z}$ elle est constante. Or, $H(0,\cdot)$ est de degré nul et il en est de même pour $H(1,\cdot) = \tilde{f}$. Mais 0 n'est pas impair, d'où contradiction. □

Remarque. Les mêmes arguments conduisent au théorème de Brouwer pour le disque fermé $\overline{\mathbf{D}}$: il suffit de voir qu'il n'existe pas de retraction de $\overline{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{U}$ (ou de façon équivalente que l'identité sur $\mathbf{U}$, qui est impaire, ne peut pas se prolonger en une fonction continue qui envoie $\overline{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{U}$).