204

Connexité. Exemples et applications.

Dans toute suite, X désigne un espace topologique.

I - DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1. Définitions de la connexité

Déf 1 On a équivalence entre

1) si $X = O_1 \sqcup O_2$ avec O_1, O_2 ouverts alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$

2) si $X = F_1 \sqcup F_2$ avec F_1, F_2 fermés alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$

3) si $A \subset X$ et A ouvert-fermé, alors $A = \emptyset$ ou $A = X$

Un espace X vérifiant 1), 2) ou 3) est appelé espace connexe.

Ex 2: $\emptyset$ et X sont connexes. si $x \in X$, $\{x\}$ est également connexe.

Prop 3 X est connexe ssi toute application $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ continue est constante.

Ex 4: les segments sont des connexes de $\mathbb{R}$.

Déf 5: Soit Y une partie de X. On dit que Y est connexe dans X si le sous-espace topologique Y muni de la topologie induite par celle de X est connexe au sens de la définition 1. Cela revient à dire que si $Y \subset \omega_1 \cup \omega_2$ avec ω_j ouverts de X et $\omega_1 \cap \omega_2 \cap Y = \emptyset$ alors $\omega_1 \cap Y = \emptyset$ ou $\omega_2 \cap Y = \emptyset$.

2. Opérations et stabilité

Prop 6: Si les A_i sont connexes dans X et si $\bigcap_I A_i \neq \emptyset$ alors $\bigcup_I A_i$ est connexe.

C-ex 7: L'union de deux boules disjointes d'un espace vectoriel normé n'est pas connexe.

Prop 7: Si $A_1, \dots, A_m$ est une chaîne ($A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ si $i \leq m-1$) de connexes de X alors $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ est connexe.

C-ex 8: L'intersection de deux connexes n'est pas forcément  connexe.

Prop 9: Soit $(X_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques. On a équivalence entre

a) X_i est connexe pour tout i.

b) X est connexe

Ex 10: Un produit de m segments est connexe dans $\mathbb{R}^m$.

Prop 11: Si $A \subset X$ est connexe et si $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

Prop 12: Soit f une application continue de X dans Y; si X est connexe, $f(X)$ est aussi un connexe.

Ex 13: C'est faux pour l'image réciproque. Considérer $f : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\end{array}$, alors $f^{-1}([1,9]) = [-3,-1] \sqcup [1,3]$ non connexe.

App 14: $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphe.

3. Composantes connexes

Déf 14: On définit la relation d'équivalence suivante dans X : $x \sim y$ ssi $\exists C$ connexe de X tel que $x \in C$ et $y \in C$. Les classes d'équivalence de $\sim$ s'appellent les composantes connexes de X. On note $C(x)$ la composante connexe de X.

Prop 15:

1) $C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x; c'est aussi le plus grand connexe contenant x.

2) $C(x)$ est fermée dans X.

Ex 16: Reprenons l'exemple 13. Alors $f^{-1}([1,9])$ a deux composantes connexes : $[-3,1]$ et $[1,3]$.

Prop 17: Si $X = \bigsqcup_I \omega_i$ où les ω_i sont ouverts connexes non vides, alors les ω_i sont les composantes connexes de X.

4. Connexité sur la droite réelle

Thm 18: Soit A une partie de $\mathbb{R}$; on a équivalence entre

1) A est connexe

2) A est un intervalle

App 19: Thm des valeurs intermédiaires. Soit X un espace connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue ; si f prend deux valeurs α et β, elle prend toute valeur γ intermédiaire entre α et β.

Thm de Darboux 20: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable alors $f'(I)$ est un intervalle.

App 21 (thm de Brouwer en dimension 1) Toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ possède un point fixe.

II - NOTIONS LIÉES À LA CONNEXITÉ

1. Connexité par arcs

Déf 22: X est dit connexe par arcs si pour deux points a, b de X quelconque il existe toujours un chemin joignant a à b dans X ie une application continue $f : [0,1] \to X$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Ex 23 : Un convexe d'un evn est connexe par arcs (c.p.a), en particulier, les boules.

Ex 24 : Une partie K étoilée (au sens où $x \in K$ implique $[a,x] \subset K$) est connexe par arcs.

Ex 25 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue alors l'épigraphe de f défini par $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y \geq f(x)\}$ est connexe par arcs.

Prop 26 : X connexe par arcs implique X connexe.

C-ex 27 : L'ensemble $X = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \,;\, x \in]0,1]\}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Prop 28 : Dans le cas où X est un ouvert d'un evn E, on a bien X connexe implique X connexe par arcs.

↳ ajouter ex de localement connexe : Variétés ?

2. Locale connexité

Déf 29 : On dit que X est localement connexe (resp. cpa) en un point a si pour tout voisinage V de a, il existe un voisinage $V' \subset V$ connexe (resp. cpa). On dit que X est localement connexe (resp cpa) si X est localement connexe en chacun de ses points.

Ex 30 : Tout ouvert d'un evn est localement connexe par arcs.

C-ex 31 : $\mathbb{R}^*$ muni de la topologie induit par celle de $\mathbb{R}$ est localement connexe mais pas connexe par arcs.

C-ex 32 : Le peigne de Dirac, défini comme $\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \times [0,1]\right) \cup [0,1] \times \{0\}$, est connexe mais non localement connexe.

Prop 33 : Si X est connexe et localement cpa alors il est cpa.

Prop 34 : Soit $f : X \to Y$ un homéomorphe. Si X est localement connexe alors Y est localement connexe.

C-ex 35 : Le peigne de Dirac n'est homéomorphe à aucun intervalle de $\mathbb{R}$.

3. Les ε-chaînes

Dans cette partie, on considère (X,d) un espace métrique.

Déf 36 : X est dit bien enchaîné si pour tout $\varepsilon > 0$, pour tous éléments a, b de X, il existe une ε-chaîne joignant a et b ie il existe une suite finie $(a_0, \dots, a_m)$ de X telle que $a_0 = a$, $a_m = b$ et $d(a_i, a_{i+1}) \leq \varepsilon$ pour $0 \leq i \leq m-1$.

Ex 37 : Les intervalles et les compacts sont bien enchaînés.

Prop 38 : X connexe implique X bien enchaîné.

Prop 39 : Supposons X métrique compact. On a équivalence entre :
1) X connexe
2) X est bien enchaîné.

III - APPLICATIONS DE LA CONNEXITÉ

1. Passage du local au global pour l'analyse réelle

Prop 40 : Soit X connexe et $f : X \to Y$ localement constante (ie tout point $a \in X$ possède un voisinage V sur lequel f vaut $f(a)$) alors f est constante.

App 41 : Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ où Ω ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ telle que f différentiable en tout point et $df = 0$, alors f est constante sur Ω.

C-ex 42 : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$. Alors f dérivable et $f' \equiv 0$. Alors $f \equiv \pi/2$ sur $]0,+\infty[$ et $f \equiv -\frac{\pi}{2}$ sur $]-\infty,0[$.

App 43 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(m)}(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction polynomiale.

Thm 44 : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{N}, \varphi^{(m)}(x) = 0$ alors φ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$.

Thm 45 (Cauchy-Lipschitz) : Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, où I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ telle que f soit continue et localement lipschitz en la deuxième variable. Alors, si $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy-Lipschitz

$$(P) : \begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

DEV 1

2. Passage du local au global pour l'analyse complexe

Thm 46 (des zéros isolés) : Soit Ω un ouvert connexe et soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. On pose $Z(f)=\{a\in\Omega : f(a)=0\}$. Alors ou bien $Z(f)=\Omega$, ou bien $Z(f)$ n'a pas de points d'accumulation dans Ω.

Cor 47 : Si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω, ouvert connexe et si $f=g$ sur un ensemble qui a un point d'accumulation alors $f=g$ sur Ω.

Thm 48 (Principe du maximum) : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constante. Alors $|f|$ n'a pas de maximum local.

3. Connexité dans les matrices

Prop 49 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe car c.p.a.

Prop 50 : $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes qui sont $\{A \in GL_n(\mathbb{R}) ; \det(A)>0\}$ et $\{A\in GL_n(\mathbb{R}) ; \det A<0\}$

Prop 51 : L'ensemble des matrices symétriques définies positives est connexe car étoilé par rapport à l'identité.

Prop 52 : L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant +1 est connexe car étoilé par rapport à l'identité.

DEV 2

Thm 53 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}[A]$ désigne l'algèbre des polynômes en A.

Cor 54 : L'image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par l'application exponentielle est $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{A^2 : A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

RÉFÉRENCES

* H. Queffélec, Topologie
* J-P. Demailly, Analyse numérique et équations diff. (DEV1)
* M. Zavidovique, Un Max de Math (DEV 2)
* W. Rudin, Analyse réelle et complexe (III.2)
* F. Rouvière, Petit guide de calcul différentiel (III.1)
* N. El Hage Hassan, Topologie générale (c-ex 27)

Dieudonné Calcul infinitésimal Vol 1.

Brézis
Gourdon

Stein - Shakarchi.

Autre possibilité de Plan : cpa en 1.
invariants en 2.

simple connexité.

connexité = notion algébrique ?

~~Et~~ DEV : Th Hadamard -> ++
Th Jordan.
SO_n est connexe.
Th de Brouwer
Th de la boule chevelue.
Prop 39 ?

Théorème de Cauchy-Lipschitz

<u>Théorème</u>

> Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ une app. continue et localement lipschitzienne en la $2^{\text{ème}}$ variable. Alors si $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$ sont donnés, le pb de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique sol max

$1^{\text{ère}}$ ÉTAPE : CYLINDRE DE SÉCURITÉ cf DEMAILLY p.122-123

Comme I et Ω sont ouverts, il existe $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(y_0, r_0)$ un cylindre inclus dans $I \times \Omega$. On choisit T_0 assez petit pour que f soit k-lips sur C_0 (possible car f localement lips en la 2^{nd} variable). De plus C_0 compact de $\mathbb{R}^{m+1}$ donc sur C_0, f bornée par une constante M.

Considérons un cylindre plus petit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(y_0, r_0)$, $T \leq T_0$.
Sps que la solution y s'échappe de C sur l'intervalle $[t_0 - T, t_0 + T]$.
Notons $\bar{\tau}$ le premier instant où cela se produit ie $\bar{\tau} = \inf \underbrace{\{t \in [t_0 - T, t_0 + T], \|y(t) - y_0\| > r_0\}}_{= I}$

. $\forall h > 0$, $\|y(\bar{\tau} - h) - y_0\| \leq r_0$ donc par cont. $\|y(\bar{\tau}) - y_0\| \leq r_0$.
. $\exists$ une suite (t_n) de I, $t_n \to \bar{\tau}$: $\|y(t_n) - y_0\| > r_0$ et par cont. $\|y(\bar{\tau}) - y_0\| \geq r_0$

Alors par continuité de y, $\|y(\bar{\tau}) - y_0\| = r_0$. Or $\|y(\bar{\tau}) - y_0\| = \|\int_{t_0}^{\bar{\tau}} y'(u)\,du\|$ $= \|\int_{t_0}^{\bar{\tau}} f(u, y(u))\,du\| \leq |\bar{\tau} - t_0| M \leq TM$ donc $T \geq \frac{r_0}{M}$.

Ainsi si $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, toute solution définie sur un intervalle de $\mathfrak{J} \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste dans la boule $\bar{B}(y_0, r_0)$. C est appelé cylindre de sécurité.
(dans l'optique d'avoir le même ensemble de départ et d'arrivée dans notre point fixe)

$2^{\text{ème}}$ ÉTAPE : EXISTENCE LOCALE cf DEMAILLY p.131 avec une fin $\neq$

Considérons l'ens $\mathcal{F} = \mathcal{C}([t_0 - T, t_0 + T], \bar{B}(y_0, r_0))$ muni de la distance issue de la norme uniforme. C'est une partie complète,
$\mathcal{C}(K, E)$ avec K compact, E complet est complet

Nous allons appliquer le thm du point fixe à la fonction suivante.

Φ bien déf. car $\forall t$, $\|\Phi(y)(t) - y_0\| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq r_0$ (par choix de T, donc $\|\Phi(y) - y_0\|_\infty \leq r_0$ et $\Phi(y) \in F$) — ce qui interdit la sortie du cylindre de sécurité

$F \to F$

$\Phi : y \longmapsto \Phi(y) : t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\,du$. Mq Φ est contractante.

Soient $y_1, y_2 \in F$. Soit $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$

$$\|\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \{ f(u, y_1(u)) - f(u, y_2(u)) \}\,du \right\|$$
$$\leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|y_1(u) - y_2(u)\|\,du \right|$$
$$\leq k\,|t - t_0|\,\|y_1 - y_2\|_\infty$$
$$\leq k\,T\,\|y_1 - y_2\|_\infty$$

donc $\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_\infty \leq kT \|y_1 - y_2\|_\infty$. — pourquoi ceux s'emboîtent avec les itérés ?

Ainsi, si on choisit T / $kT < 1$ alors Φ est contractante, et il existe une unique solution définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

3ème ÉTAPE : UNICITÉ LOCALE cf dev d'ADRIEN LAURENT

Soient y_1 et y_2 deux solutions du pb de Cauchy déf. sur des intervalles ouverts ~~contenant $[t_0 - T, t_0 + T]$~~ notés resp. I_1 et I_2. Mq y_1 et y_2 coïncident sur $I_1 \cap I_2$. Pour cela, notons $J = \{x \in I_1 \cap I_2 \,/\, y_1(x) = y_2(x)\}$ et mq $J = I_1 \cap I_2$.

* $t_0 \in J$ donc $J \neq \emptyset$
* J fermé car image réciproque par une app. continue $(y_1 - y_2)$.
* Soit $t_1 \in J$. Alors y_1 et y_2 sont toutes les deux solutions du pb de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_1) = y_1(t_1) \end{cases}$ qui, en reprenant la démo précédente, admet une unique solution sur un intervalle du type $[t_1 - T', t_1 + T']$ donc y_1 et y_2 coïncident sur cet intervalle et $]t_1 - T', t_1 + T'[\subset J$ donc J est ouvert.

∩ de connexes pas connexe en général mais vrai pour ℝ car ∩ de 2 intervalles reste un intervalle ?

Ainsi, J est une partie non vide fermée et ouverte de $I_1 \cap I_2$ qui est connexe

4ème ÉTAPE : CONSTRUCTION DE LA SOL. MAX cf dev ADRIEN LAURENT

On considère $I = \bigcup_{(\tilde{I}, y) \in S} \tilde{I}$ avec S l'ensemble des solutions $(\tilde{I}, y)$ au pb de Cauchy. On définit y^* sur I comme $y^*(x) = y(x)$ si $x \in \tilde{I}$ et $(\tilde{I}, y)$ solution. y^* bien définie d'après l'unicité locale.

En effet, si $(\tilde{I}_1, y_1)$ et $(\tilde{I}_2, y_2)$ sont deux solutions tq $x \in \tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2$, alors on a bien $y^*(x) = y_1(x) = y_2(x)$ car on sait que alors y_1 et y_2 coïncident sur $\tilde{I}_1 \cap \tilde{I}_2$.

La solution (J, y^*) définie ainsi est maximale.

Rajouter app

Réversion des [illegible]

Image de l'exp. cf [illegible]

Théorème

algèbre des poly. en A

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

Idée : On va montrer $\mathbb{C}[A]^\times$ est un connexe puis que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est une partie ouverte et fermée de $\mathbb{C}[A]^\times$ pour conclure.

Rque : "$\subset$" est facile : si $P \in \mathbb{C}[A]$, $\exp(M) \in \mathbb{C}[A]$ car limite d'un élément de $\mathbb{C}[A]$ qui est de dimension finie (car $\mathbb{C}[A] \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc la famille $(I_d, A, \dots, A^n, \dots)$ est forcément liée sinon $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettrait une famille libre infinie [cf existence d'un polynôme annulateur en dim. finie) donc fermé. De plus, $\det(\exp M) = \exp(\operatorname{tr} M) \neq 0$ donc $\exp(M) \in \mathbb{C}[A]^\times$ (si on sépare la 2e = [illegible]). Donc c'est l'inclusion inverse qui est dure ie la surjectivité. — en fait = tout

= { polynômes en A dont l'inverse reste un poly en A }

1ère étape : $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

"$\subset$" évidente / "$\supset$" Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$, par Cayley-Hamilton, $M^{-1} \in \mathbb{C}[M] \subset$ [illegible]

2ème étape : $\mathbb{C}[A]^\times$ connexe

On va montrer il est c.p.a. Soient $M_0, M_1 \in \mathbb{C}[A]^\times$. L'appl. $P : z \mapsto \det(zM_0 + (1-z)M_1)$ est un poly en z non nul (en 0 et en 1 $\neq 0$) donc s'annule un nbre fini de fois. Ainsi il est possible de trouver $t \mapsto z(t)$, $z(0)=0$, $z(1)=1$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C} \setminus Z(P)$ cont. qui évite ces points. Alors $t \mapsto (1-z(t))M_1 + z(t)M_0$ est un chemin qui convient.

3ème étape : $\exp(\mathbb{C}[A])$ est une partie fermée et ouverte de $\mathbb{C}[A]^\times$

* Partie ouverte $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ C^1

car on la connait pour $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ $d\exp(0) = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ donc on l'obtient par restriction

exp : $\mathbb{C}[A] \longrightarrow \mathbb{C}[A]$

On connaît sa différentielle en 0 : $d\exp(0) = id_{\mathbb{C}[A]}$. Elle est est bijective et le thm d'inversion local assure l'existence

et $\exp : \mathbb{C}[A] \to \mathbb{C}[A]$ de classe C^1 avec $\mathbb{C}[A]$ Banach car sev de dim finie d'un e.v.n.

de deux ouverts $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ de $\mathbb{C}[A]$ contenant respectivement 0 et id tq $\exp : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféo. [Et comme $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$, en fait $\mathcal{V} = \mathcal{V} \cap \mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$.]

En particulier, $\mathcal{V} = \exp(\mathcal{U}) \subset \exp(\mathbb{C}[A])$ donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ contient un voisinage de l'identité (qui est $\mathcal{V}$).

De plus $f : M + \mathcal{U} \to \exp(M)\mathcal{V}$ est aussi un difféomorphisme (car $f(N) = \exp(M)\exp(N - M)$, $N \mapsto \exp(M - N)$ diff. $\mathcal{C}^1$ comme composée avec la translation et $N \mapsto \exp(M)N$ difféo car $\exp(M)$ inversible). Donc $\exp(M)\mathcal{V} = f(M + \mathcal{U}) \subset \exp(\mathbb{C}[A])$ donc $\exp(\mathbb{C}[A])$ contient un voisinage de $\exp(M)$ (qui $\exp(M)\mathcal{V}$ qui est bien un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$).

$\exp(\mathbb{C}[A])$ est un voisinage de tous ses points : c'est un ouvert.

* Partie fermée

Remarquons que $\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp\mathbb{C}[A] = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp\mathbb{C}[A]} M\exp(\mathbb{C}[A])$

("$\subset$" évident : si $N \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp\mathbb{C}[A]$, $N = N\exp(0)$ / "$\supset$" par complémentaire, soit $N \in \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp\mathbb{C}[A]} M\exp(\mathbb{C}[A])$: $N = M\exp(\tilde{N}) \in \exp(\mathbb{C}[A])$, et $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp\mathbb{C}[A]$ alors $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$ sinon $N = M\exp(\tilde{N})$, i.e. $M = \exp(\tilde{N})\exp(\tilde{M})^{-1} = \exp(\tilde{N}\tilde{M}^{-1}) \in \exp(\mathbb{C}[A])$ ↯)

Donc $\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp\mathbb{C}[A]$ ouvert comme réunion d'ouverts.

3ème étape : Conclusion

$\exp\mathbb{C}[A]$ est un ouvert et fermé de $\mathbb{C}[A]^\times$ connexe, et non vide,

donc $\exp\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}[A]^\times$.