2011 ! Espaces connexes. Exemples et applications.

I - Espaces connexes

Dans toute cette partie, X désigne un espace topologique.

(A) - Premières définitions

Déf / Prop ① : On a équivalence entre :
1) Si $X = O_1 \sqcup O_2$ avec O_i ouverts, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.
2) Si $X = F_1 \sqcup F_2$ avec F_i fermés, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.
3) Toute application $f : X \to \mathbb{Z}$ continue est constante.
4) Si $A \subset X$ est ouverte et fermée, alors $A = X$ ou $A^c = X$.

Si X respecte une de ces conditions, on dit que X est connexe.

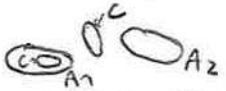
Ex ② : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont connexes. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ne l'est pas.

Prop ③ : Soit $Y \subset X$. Y est connexe pour la topologie induite de X si : si $Y \subset \omega_1 \cup \omega_2$ avec ω_i ouverts et $\omega_1 \cap \omega_2 \cap Y = \emptyset$, alors $Y \cap \omega_1 = \emptyset$ ou $Y \cap \omega_2 = \emptyset$.

Ex ④ : $\mathbb{Q}$ n'est pas un connexe de $\mathbb{R}$.

Lemme ⑤ : (des douanes). Soit $A \subset X$. Toute partie connexe C de X qui rencontre l'intérieur et l'extérieur de A rencontre sa frontière.

Contre-Ex ⑥ : $A = A_1 \cup A_2$



Déf ⑦ : On dit que X est connexe par arc si : $\forall (a,b) \in X^2$, $\exists \gamma : [0,1] \to X$ continue telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Ex ⑧ : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. $\tilde{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > f(x)\}$. $\tilde{X}$ est connexe par arc.

Prop ⑨ : Soit X un espace connexe, g_1 et g_2 deux applications continues de X dans $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) $e^{2i\pi g_1} = e^{2i\pi g_2} \Rightarrow g_1 - g_2 =$ constante entière
b) $g_1^n = 1 \Rightarrow g_1 =$ constante racine n-ième de l'unité.

(B) Stabilité :

Prop ⑩ : Soit Y un espace topologique et $f : X \to Y$ continue. Alors, X connexe $\Rightarrow f(X)$ connexe.

Contre-Ex ⑪ : Cela ne marche pas avec l'image réciproque. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. $f^{-1}([1,+\infty[) =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$.

Prop ⑫ : Convexe $\Rightarrow$ étoilé $\Rightarrow$ connexe par arc $\Rightarrow$ connexe.

Ex ⑬ : Un espace vectoriel est convexe donc connexe.

Prop ⑭ : A connexe $\Rightarrow \bar{A}$ connexe.

Prop ⑮ : A connexe et $A \subseteq B \subseteq \bar{A} \Rightarrow B$ connexe.

Prop ⑯ : Si X est un ouvert d'un espace vectoriel normé, alors X connexe $\Rightarrow X$ connexe par arc.

Contre-Ex ⑰ : $\Gamma = \{(t, \sin(1/t)), t > 0\} \cup \{\{0\} \times [-1,1]\}$ est connexe non connexe par arc.

Théo ⑱ : 1) Si les $(A_i)_{i\in I}$ sont connexes dans X et si $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.
2) Si $A_1, \dots, A_n$ est une chaîne ($A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ si $i \leq n-1$) de connexes de X, alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est connexe.

Rq ⑲ : Une intersection de connexes n'est pas toujours connexe : Prendre $X = \mathbb{S}^1$ et $Y = \{x = y\}$.

Prop ⑳ : Soit $(X_i)_{i\in I}$ une suite d'espaces topologiques non vides. Alors $X = \prod_{i\in I} X_i$ est connexe si et seulement si X_i est connexe, pour tout $i \in I$.

Ex ㉑ : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.

(C) Composantes connexes :

Déf ㉒ : On définit une relation binaire : $x R y \Leftrightarrow \exists C$ connexe tel que $x \in C$ et $y \in C$.

Prop ㉓ : R est une relation d'équivalence sur X.

Prop ㉔ : La classe d'équivalence $C(x)$ de x s'appelle la composante connexe de x ; et c'est le plus grand connexe qui contient x.

Prop ㉕ : Les composantes connexes sont des fermés de X.

Rq : Si X se décompose en un nombre fini de composantes connexes, alors celles-ci sont ouvertes.

Prop ㉖ : Si $X = \bigsqcup_{i\in I} \omega_i$ où les ω_i sont des ouverts connexes non vides, alors les ω_i sont les composantes connexes de X.

Prop ㉗ : X est connexe $\Leftrightarrow X$ ne possède qu'une composante connexe.

Prop ㉘ : Soit $h : X \to Y$ homéomorphisme. $\forall x \in X$, $h(C(x)) = C(h(x))$.

II - Application de la notion de connexité, passage du local au global.

Prop° 29 : Soit X connexe et $f : X \to Y$ localement constante sur X. Alors, f est constante sur X.

(A) - Analyse réelle

Dans cette partie, $a < b$ sont réels.

Prop° 30 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Prop° 31 : Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Application 32 : (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : I \subset \mathbb{R}$ continue, où I est un intervalle. Alors, $f(I)$ est un intervalle.

Coro 33 (Brouwer en dimension 1) : Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Alors f admet un point fixe.

Rq 34 : Il existe un résultat similaire pour les fonctions dérivables : Le Théorème de Darboux : Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle.

Application 35 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ fonction en escalier. Alors, f n'admet pas de primitive sur I.

(B) - Calcul différentiel

Théo 37 : (ADMIS : Hadamard-Lévy) : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$.

1) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

2) f est propre et, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ inversible.

Théo 38 : Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert convexe. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\|df_x\| \leq M$ pour tout $x \in U$. Alors, $\forall (a,b) \in U^2$, $\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\|$.

(Inégalité des accroissements finis)

Théo 39 : Si U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et $df_x \equiv 0$, pour tout x dans U. Alors f est constante sur U.

Ex 40 : $(a,b) \mapsto \arctan(a) + \arctan(b) - \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ est constante sur ses composantes connexes.

(C) Analyse complexe

Def° 41 : Un domaine est un ouvert connexe du plan complexe.

Théo 42 : Soit Ω un domaine. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ s'annule ainsi que toutes ses dérivées en un même point $z_0 \in \Omega$, alors f est identiquement nulle.

Coro 43 (Principe du prolongement analytique) Soit Ω domaine. Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur Ω qui coïncident sur un ouvert non vide $V \subset \Omega$, alors $f \equiv g$ dans Ω tout entier.

Application 44 : Si Ω est un domaine, $\mathcal{H}(\Omega)$ est anneau intègre.

Théo 45 : Soit Ω un domaine et $f \in \mathcal{H}(\Omega) \setminus \{0\}$. Alors : $\forall a \in Z(f)$, $\exists!\, m \in \mathbb{N}^*$ et $\exists!\, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tels que : $f(z) = (z-a)^m g(z)$ et $g(a) \neq 0$

Coro 46 : (Principe des zéros isolés) : Soit Ω domaine et $f \in \mathcal{H}(\Omega) \setminus \{0\}$. Soit $a \in Z(f)$, alors a admet un voisinage dans lequel f n'admet pas d'autres zéros.

Prop° 47 : Soit Ω connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $|f|$ admet un maximum global sur Ω, alors f est constante.

Coro 48 Ω domaine et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constante telle que $|f|$ admet un minimum local dans Ω, alors ce minimum est nul.

Application 49 Théorème fondamental de l'algèbre.

III. Connexité dans les espaces de matrices

A) Groupes topologiques

Def 50 : Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie qui rend continue l'application

Ex 51 : $GL_n(K)$.

Prop 52 : Soit G un groupe topologique et $H \leq G$. Si H et G/H sont connexes alors G l'est aussi.

Prop 53 : Soit G un groupe topologique et G_0 la composante connexe de l'identité. Alors, pour tout $g \in G$, gG_0 est la composante connexe de g.

Def 54 : $SO_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des isométries de déterminant 1 de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

Def 55 : Un renversement est un élément de $SO_3(\mathbb{R})$, conjugué à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prop 56 : $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe. C'est l'une des composantes connexes de $O_3(\mathbb{R})$, la seconde étant $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det(M) = -1\}$.

Theo 57 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple] DEV 1

B) Connexité en algèbre linéaire

Prop 58 $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arc.

Theo 59 $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n^-(\mathbb{R}) \sqcup GL_n(\mathbb{R})^+$ où $GL_n^-(\mathbb{R})$ et $GL_n^+(\mathbb{R})$ sont connexes.

Prop 60 $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.

Def 61 : Soit $A \in M_n(K)$. On définit $\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}$.

Prop 62 : $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$, $A \longmapsto \exp(A)$ est surjective.] DEV 2.

Références

* Analyse complexe, Eric Amar
* Topologie, Queffelec
* Analyse, Gourdon
* Éléments d'analyse, Zuily - Queffelec
* Un max de maths, Zavidovique
* Algèbre 3 Francinou