204 Connexité. Exemples et applications.

I- Définitions et propriétés

Soit X un espace topologique.

1) Connexité

Déf. 1 : X est dit connexe s'il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes :

(1) Si $X = O_1 \cup O_2$, avec $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ et O_1, O_2 ouverts, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.

(2) Si $X = F_1 \cup F_2$, avec $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ et F_1, F_2 fermés, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.

(3) Si $A \subset X$, et A ouvert et fermé, alors $A = X$ ou $A = \emptyset$.

(4) Toute application continue $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ est constante.

Rque 2 : Dans (4), on peut remplacer $\mathbb{Z}$ par n'importe quel espace discret comportant au moins deux éléments.

Ex 3 : $[0,1]$ est connexe dans $\mathbb{R}$.

C-Ex 4 : $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe dans $\mathbb{R}$.

Déf. 5 : Soit Y une partie de X. Y est connexe dans X si Y, muni de la topologie induite par celle de X, est connexe au sens de la Déf. 1.

Prop 6 : Soit A une partie de X. Toute partie de X qui rencontre l'intérieur de A et l' de A rencontre aussi la frontière de A

2) Propriétés de stabilité :

Prop 7 : Si les A_i sont connexes dans X, avec $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Prop 8 : Si $A_1, \dots, A_n$ est une chaîne de connexes de X ($A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ si $i \leq n-1$), alors $\bigcup_i A_i$ est connexe.

Rque 9 : En général, une intersection de connexes n'est pas connexe.

C-ex 10 : Voir (fig 2) : $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1,\ x \geq 0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1,\ x \leq 0\}$.

Prop 11 : Soit $f : X \longrightarrow Y$ continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ aussi.

Prop 12 : Si $A \subset X$ est connexe, et $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe.

Coro 13 : Si $A \subset X$ est connexe, alors $\bar{A}$ est connexe.

Prop 14 : Soit $(X_i)_{i \in I}$ des espaces topologiques. Alors : $\forall i \in I$, X_i est connexe $\Longleftrightarrow \prod_{i \in I} X_i$ est connexe.

3) Composantes connexes

Déf 15 : On définit une relation d'équivalence entre x et y dans X par : $x \sim y \Longleftrightarrow \exists C$ connexe dans X tq $x \in C, y \in C$. Les classes d'équivalences de x pour "$\sim$" se notent $C(x)$ et s'appellent composantes connexes de x.

Prop 16 : $C(x)$ est la réunion de tous les ouverts connexes contenant x. C'est le plus grand ouvert connexe contenant x.

Prop 17 : $C(x)$ est fermée dans X.

Prop 18 : Si $X = \bigsqcup_i \omega_i$, où les ω_i sont des ouverts connexes non vides, alors les ω_i sont les composantes connexes de X.

Ex 19 : Les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

4) Connexité par arcs :

Déf. 20 : X est dit connexe par arcs s'il existe un chemin f joignant deux points a et b quelconques dans X. Ce chemin est une application continue $f : [0,1] \to X$ telle que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Prop 21 : Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.

Rque 22 : La réciproque est vraie si X ouvert d'un EVN.

Rque 23 : Convexité $\Rightarrow$ Connexité par arcs $\Rightarrow$ connexité.

5) Conséquences et exemples

Prop 24 : Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les connexes de $\mathbb{R}$.

Prop 25 : $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.

Prop 26 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. (Voir (fig 3)

Prop 27 : $[0,1]$ et S^1 ne sont pas homéomorphes. Voir (fig4)

Ex 28 : Soit $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})), x \in \mathbb{R}^*\}$. (fig. 5)
$\bar{A}$ est connexe, mais pas connexe par arcs.

Ex 29 : Voir (fig.). L'ensemble triadique de Cantor est totalement discontinu, i.e : la composante connexe de chacun de ses points est l'ensemble réduit à ce point.

App. 30 : Théorème de d'Alembert - Gauss : démonstration par connexité par arcs.

II - Applications à l'analyse réelle

Thm 31 : TVI. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Si f prend deux valeurs distinctes a et b, elle prend toute valeur intermédiaire entre a et b.

Thm 32 : Point fixe de Brouwer en dimension 1 : toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ possède un point fixe.

Thm 33 : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

III - Passage du local au global

1) En calcul différentiel

Déf 34 : $f : X \to Y$ est dite localement constante si tout point $a \in X$ possède un voisinage V sur lequel f vaut $f(a)$.

Prop 35 : Soit $f : X \to Y$ localement constante, X connexe. Alors f est constante.

Thm 36 : $f : U \subset E \to F$ différentiable sur un ouvert connexe U, avec E, F espaces de Banach, tq $\forall x \in U$, $df(x) = 0$. Alors f est constante.

Thm 37 : Thm de Cauchy - Lipschitz.
Soient U ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$; $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue par rapport à (t, x) ; $(t_0, x_0) \in U$. On a le pb de Cauchy :
$$x'(t) = f(t, x(t)) \; ; \; x(t_0) = x_0 \qquad (1)$$
On suppose f localement lipschitzienne par rapport à x.
Alors $\forall (t_0, x_0) \in U$, le pb a une unique solution locale :
- $\exists I$ voisinage ouvert de t_0, et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, tq $\forall t \in I$, $\gamma'(t) = f(t, \gamma(t))$; $\gamma(t_0) = x_0$.
- Si $(I_1 ; \gamma_1)$ et $(I_2 ; \gamma_2)$ sont deux solutions locales, alors $\gamma_1 = \gamma_2$ sur $I_1 \cap I_2$.

2) En analyse complexe

Déf. 38 : Un domaine est un ouvert non vide connexe du plan complexe.

Thm 39 : Soit γ un chemin fermé ($\gamma(0)=\gamma(1)$) continuement différentiable par morceaux ; soit Ω le complémentaire de cet arc.

$$\forall z\in\Omega,\ \mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi .$$

La fonction indice est à valeurs entières sur Ω, constante sur chaque composante connexe de Ω.

Thm 40 : Formule de Cauchy. Soit Ω un domaine, et γ un chemin fermé de Ω. Soit f holomorphe sur Ω. Si $z\in\Omega$ et $z\notin \mathrm{Im}(z)$; alors $f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$.

Thm 41 : Zéros isolés. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. $\exists\, z\in\Omega$ tq $\forall m\geq 0$, $f^{(m)}(z)=0$, Alors f est identiquement nulle.

Coro 42 : Si f est non identiquement nulle, alors ses zéros sont isolés, ie : $Z(f)=\{z\in\Omega \mid f(z)=0\}$ est un ensemble discret de Ω.

Coro 43 : Unicité du prolongement analytique.
Deux fonctions holomorphes sur un domaine qui coïncident sur un ensemble non discret et non vide sont égales.

IV - Connexité dans les espaces de matrices

1) Quelques résultats remarquables

Prop 44 :
- $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert connexe par arcs.
- $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs : $G^+ = \{M\in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det M > 0\}$ et $G^- = \{M\in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det M < 0\}$.

Prop 45 : $SL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Prop 46 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. C'est l'une des deux composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$, l'autre étant : $O^- = \{M\in O_n(\mathbb{R}) \mid \det M = -1\}$.

App 47 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

2) Surjectivité de l'exponentielle matricielle

Thm 48 : Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$. $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]\cap GL_n(\mathbb{C})$.
En particulier, $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective, et un antécédent de $A\in GL_n(\mathbb{C})$ est un polynôme en A.

Prop 49 : $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2 \mid A\in GL_n(\mathbb{R})\}$.

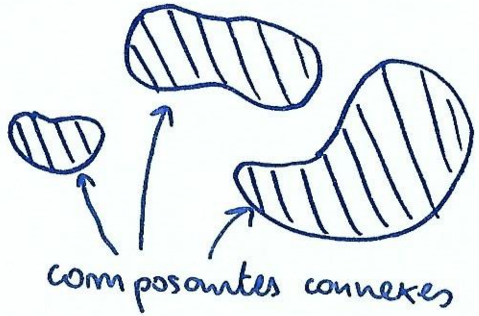
Autres développements possibles :
- Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$ (App 47)
- Thm de Runge.

Biblio :
- Queffélec : Topologie.
- Zavidovique : Un max de Maths
- Pommellet : Cours d'analyse
- Rudin : Analyse complexe.
- Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles
- Gonnord-Tosel.

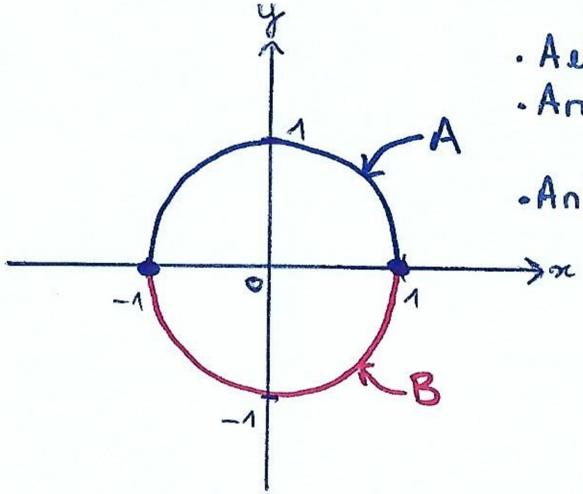
<u>Annexes:</u>

(fig 1)

Ensemble total : pas connexe.

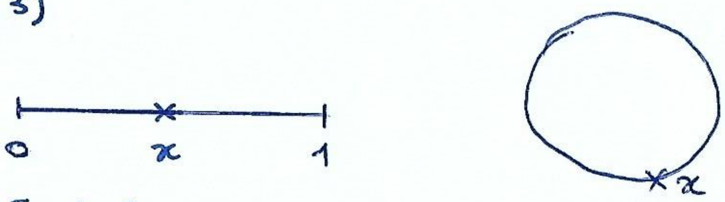


(fig 2)



- A et B connexes
- $A \cap B = \{-1,0\} \cup \{(1,0)\}$.
- $A \cap B$ pas connexe.

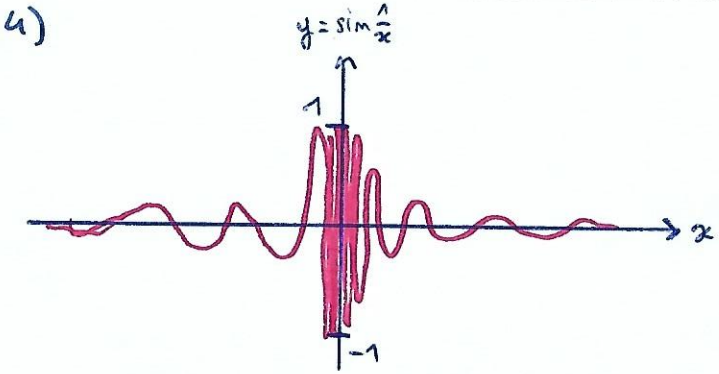
(fig 3)



$[0,1] \setminus \{x\}$ pas connexe

$S^1 \setminus \{x\}$ connexe

(fig 4)



(fig 5) Ensemble triadique de Cantor :