204

Connexité. Exemples et applications.

I - Généralités sur la connexité.

1) Espaces et parties connexes.

Def-Prop 1 Un espace topologique E est dit connexe s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :
- Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\emptyset$ et E.
- On ne peut pas partitionner E en deux parties ouvertes.
- On ne peut pas partitionner E en deux parties fermées.

Ex 2 $\mathbb{R}$ est connexe, $\mathbb{Z}$ ne l'est pas.

Prop 3 Un espace topologique E est connexe si et seulement si toute application continue de E dans $\{0,1\}$ est constante.

Def 4 Une partie d'un espace topologique est dite connexe si munie de la topologie induite il s'agit d'un espace connexe.

Prop 5 Une partie A est connexe si et seulement si dès que $A \subset V_1 \cup V_2$ avec V_1, V_2 deux ouverts disjoints alors $A \subset V_1$ ou $A \subset V_2$.

2) Connexité par arcs.

Def 6 Un espace E est dit connexe par arcs si pour tous $x, y \in E$ il existe une application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Prop 7 La connexité par arcs implique la connexité.

Ex 8 Les convexes et les parties étoilées sont connexes.

Contre-ex 9 Dans $\mathbb{R}^2$, la partie suivante est connexe mais non connexe par arcs.

$$\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right), x>0\right\} \cup \{0\}\times[-1,1]$$

Prop 10 Dans un espace vectoriel normé, un ouvert est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.

3) Propriétés de stabilité.

Prop 11 Deux espaces homéomorphes sont simultanément connexes.

Ex 12 $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Prop 13 L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Prop 14 L'adhérence d'un connexe est connexe.

Prop 15 Si A est connexe et $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe également.

Prop 16 Si $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille de parties connexes d'un même espace telle que $\forall i \in \mathbb{N}, V_{i+1} \cap V_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i$ est connexe.

Rq 17 En general une union ou une intersection de connexes n'est pas nécessairement connexe.

Prop 18 Un produit quelconque d'espaces connexes est un espace connexe.

4) Composantes connexes.

Def 19 Une composante connexe d'un espace est une partie connexe maximale pour l'inclusion.

Prop 20 Les composantes connexes d'un espace en forment une partition.

Ex 21 Les composantes connexes de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sont $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, celles de $\mathbb{Q}$ sont les singletons.

Prop 22 Une application continue de E dans F envoie toute composante connexe de E dans une composante connexe de F.

Prop 23 Tout homéomorphisme entre E et F induit une bijection entre les composantes connexes de E et celles de F.

Def 24 Une application f définie sur un espace E est dite localement constante si tout point de E admet un voisinage sur lequel f est constante.

Prop 25 Une application localement constante sur E est constante sur chaque composante connexe de E.

Prop 26 Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé et f une application différentiable sur U telle que $df_x = 0$ en tout point $x \in U$. Alors f est constante sur chaque composante connexe de U.

II - Utilisation de la connexité sur $\mathbb{R}$.

1) Propriété des valeurs intermédiaires.

Prop 27 Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Prop 28 Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Thm 29 (Théorème des valeurs intermédiaires) L'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.

Prop 30 Soit I un segment, toute application continue de I dans I admet un point fixe.

Prop 31 Pour toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ il existe deux points antipodaux de $\mathbb{S}^n$ ayant la même image par f.

Thm 32 (Darboux) Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $f'(I)$ est un intervalle.

2) Prolongement par connexité.

Thm 33 (Cauchy-Lipschitz) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^0(I \times U, \mathbb{R}^n)$ localement lipschitzienne par rapport à la variable d'espace. Pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale.

DEV 1

Thm 34 (Stabilité de Lyapounov) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ voisinage de 0 et $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ telle que $f(0) = 0$ et telle que les parties réelles des valeurs propres de $df(0)$ soient strictement négatives. Alors 0 est un point d'équilibre assymptotiquement stable pour l'équation différentielle $y' = f(y)$.

DEV 2

Thm 35 (Relèvement des lacets) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in C^k(I, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ avec $k \geq 0$. Pour tout $(t_0, \theta_0) \in I \times \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = r_0 e^{i\theta_0}$ avec $r_0 > 0$, il existe un unique couple d'applications de classe C^k, $r : I \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ tel que $\theta(t_0) = \theta_0$ et $\forall t \in I \quad f(t) = r(t) e^{i\theta(t)}$.

Def-Prop 36 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ de classe C^1 tel que $f(0) = f(1)$, alors la quantité $I(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{f'(t)}{f(t)} dt$ est un entier relatif apellé indice de f autour de 0.

Prop 37 Si $\|f - g\|_\infty < \|f\|_\infty$ alors $I(f) = I(g)$ et donc l'indice est continu sur $C^1([0,1], \mathbb{C}^*)$ pour la distance $\|\cdot\|_\infty$.

Appli 38 (Thm de D'alembert-Gauss) Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Appli 39 (Point fixe de Brouwer en 2d) Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$, toute application continue de B dans B admet un point fixe.

III - Convexité et analyse complexe.

Prop 40 Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U, s'il existe un point $z_0 \in U$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$, alors f est identiquement nulle sur U.

Thm 41 (Principe des zéros isolés.) Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert convexe U de $\mathbb{C}$ telle que l'ensemble des zéros de f admette un point d'accumulation dans U, alors f est identiquement nulle.

Coro 42 (Principe du prolongement analytique.) Soient U, V des ouverts de $\mathbb{C}$ tels que $U \subset V$ et V est convexe. Si f est holomorphe sur U et admet un prolongement analytique sur V, alors ce prolongement est unique.

Ex 43 La fonction Γ définie sur $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$ admet un unique prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Thm 44 (Principe du maximum.) Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U, si $|f|$ atteint son maximum en un point de U alors f est constante sur U.

IV - Exemples de parties convexes dans les espaces matriciels.

Prop 45 $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe, mais $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes qui sont $\det^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $\det^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$.

Prop 46 Les sous-groupes suivants de $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes : $SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{C}), U_n(\mathbb{C}), SU_n(\mathbb{C}), SO_n(\mathbb{R})$.

Prop 47 $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ sont convexes.

Prop 48 $O_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes qui sont $O_n^+(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$.

Prop 49 L'ensemble des projecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède $n+1$ composantes connexes qui sont l'ensemble des projecteurs de rang r avec $r \in [\![0, n]\!]$.

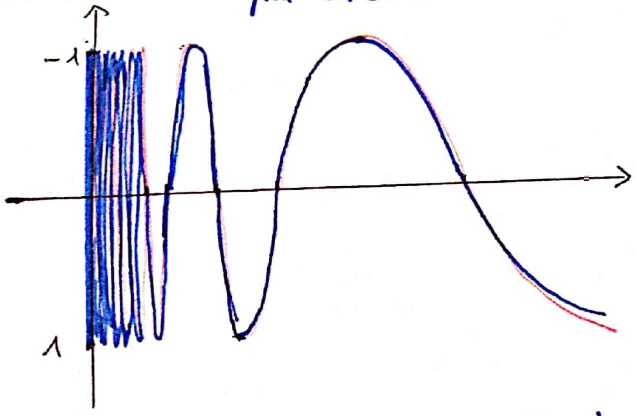
Thm 50 Le groupe $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Thm 51 Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$,
$$\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C}).$$

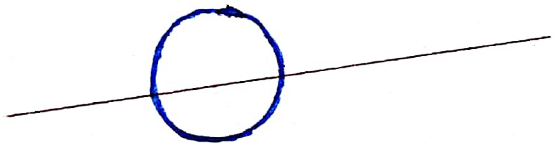
Coro 52 L'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective, de plus tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$ admet un logarithme qui est un polynôme en A.

Coro 53 $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{M^2,\ M \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

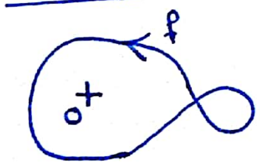
Contre-exemple 9 Un connexe non connexe par arcs.



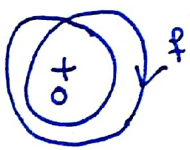
Remarque 17 Deux connexes d'intersection non connexe.



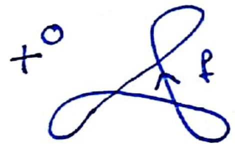
Définition 36 Illustration de l'indice.



$I(f) = 1$



$I(f) = -2$



$I(f) = 0$