Leçon 205 : Espaces Complets

Exemples et applications.

I - Généralités

A - Définitions

Gou p'20 **Déf 1** Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite de E. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \varepsilon$

Gou p'20 **Rmq 2** Soit $(x_n)_n$ une suite de E. Alors :
$(x_n)_n$ converge $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ de Cauchy $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ bornée
La réciproque est fausse.

Hau p'312 **Ex 3** $(u_n)_{n\geq 0} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ muni de la distance induite par celle de $\mathbb{R}$.

Rmq 4 La notion de suite de Cauchy n'est pas topologique. On peut avoir deux distances topologiquement équivalentes dont l'une définit un espace complet et l'autre pas.

Hau p'313 **Ex 5** Sur $E =]0, 1]$, si $d_1(x,y) = |x-y|$ et $d_2(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ alors (E, d_1) n'est pas complet mais (E, d_2) l'est.

Hag p'88 **Prop 6** Soit (E, d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de E. $(x_n)_n$ est convergente ssi elle possède une sous-suite qui converge.

Gou p'20 **Déf 7** Un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de E converge.

Hag p'89 **Ex 8** • $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est complet.
• $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle n'est pas complet.
Gou p'20 • Un ouvert strict dans un espace complet n'est pas complet. Donc $\mathbb{R}^*$ et $]0, 1[$ ne sont pas complets.

Prop 9 Un espace métrique compact est complet.

Rmq 10 Le thm d'Ascoli fournit des compacts et donc des complets. Par ex, $H_{k,M,\alpha} = \{ v \in C(X, \mathbb{R}^d), \forall (x,y) \in X^2, \|v(x) - v(y)\| \leq k\, d(x,y)^{\alpha}, \|v\|_\infty \leq M \}$ est un compact de $C(X, \mathbb{R}^d)$ et est donc complet pour $\|\cdot\|_\infty$.

B - Propriétés

Gou p'20 **Prop 11** Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.

Gou p'20 **Prop 12** Toute partie fermée d'un espace complet est complète.

Ex 13 • $(C_b(X,Y), d_\infty)$ est fermé dans $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$ qui est complet donc $(C_b(X,Y), d_\infty)$ est complet. Hag p'98
• $(C_0(\mathbb{R}), d_\infty)$ est fermé dans $(C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d_\infty)$, donc est complet

Prop 14 Soit $((X_n, d_n))_n$ une suite d'espaces métriques. Alors l'espace métrique produit $X = \prod_{n\geq 0} X_n$ est complet ssi $\forall n \geq 0$, (X_n, d_n) est complet Hag p'91

Prop 15 (fermés emboîtés)
(X, d) est complet ssi toute suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de fermés non vide dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide (donc réduite à un point) Que p'56

App 16 La méthode de dichotomie converge.

App 17 (principe de la borne uniforme)
Toute partie A non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Que p'4

Thm 18 (prolongement) Soit A une partie dense d'un espace métrique X et Y un espace métrique complet et $f : A \to Y$ uniformément continue. Alors il existe une unique application $g : X \to Y$ continue prolongeant f. De plus, g est uniformément continue. Que p'158

App. 19
• prolongement de la transformée de Fourier de L^2 dans L^2
• unicité dans le théorème suivant

C - Complété d'un espace métrique

Thm 20 Soit (X, d) un espace métrique. Alors on a : Hag p'97
1 - il existe un espace métrique complet $(\hat{X}, \hat{d})$ et une application isométrique $i : X \to \hat{X}$ tels que $i(X)$ soit dense dans $\hat{X}$
2 - si (Y, d') est un espace métrique complet et s'il existe une application isométrique $j : X \to Y$ telle que $j(X)$ soit dense dans Y alors il existe une unique application continue $\varphi : \hat{X} \to Y$ telle que le diagramme suivant soit commutatif. De plus, φ est une isométrie de $\hat{X}$ sur Y. Autrement dit $(\hat{X}, \hat{d})$ et (Y, d') sont isométriques.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ \hat{X} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Hag p'98 <u>Ex 20</u> • $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$
• $C_c(\mathbb{R})$ est dense dans $(C_0(\mathbb{R}), d_\infty)$ donc $(C_0(\mathbb{R}), d_\infty)$ est le complété de $(C_c(\mathbb{R}), d_\infty)$
• $(L^p([0,1]), \|\cdot\|_p)$ est le complété de $(C([0,1]), \|\cdot\|_p)$

II - Théorème du point fixe

A - Le théorème

Hag p'93 <u>Thm 21</u> Soit (X,d) un espace métrique complet et $f: X \to X$ une application contractante de rapport k. Alors on a :
1 - f possède un unique point fixe $a \in X$.
2 - Pour tout $x \in X$, $a = \lim_{n \to +\infty} f^n(x)$ et $d(a, f^n(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x))$ pour tout $n \geq 0$ où $f^0 = id$ et f^n est f itérée n fois.

Hag p'94 <u>Rmq 22</u> • si $k \geq 1$, le théorème n'est plus vrai
• si (X,d) n'est pas complet, le théorème est faux.

Hag p'94 <u>Ex 23</u> $\mathbb{N}$ muni de la distance euclidienne est complet. Si $k \in \mathbb{N}^*$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto nk+1$ est k-lipschitzienne de rapport $k \geq 1$ et n'admet pas de point fixe.

Hag p'94 <u>Ex 24</u> $]0,1[$ muni de la distance euclidienne n'est pas complet. $f:]0,1[\to]0,1[, x \mapsto \frac{x}{2}$ est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ mais n'admet pas de point fixe.

Hag p'94 <u>Thm 25</u> (généralisation) Soit (X,d) un espace métrique complet et $f: X \to X$ telle que $\exists p \in \mathbb{N}^*$, f^p soit contractante. Alors on a
1 - f possède un unique point fixe a.
2 - Pour tout $x \in X$, $a = \lim_{n \to +\infty} f^n(x)$

B - Applications

Que p'161 <u>Prop 26</u> Soit $\varphi: [0,1] \to [0,1]$ continue non identique à 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\exists! f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant l'équation fonctionnelle $f(0) = \alpha$, $f'(x) = f(\varphi(x))$.

Dem p'141 <u>Thm 27</u> (de Cauchy-Lipschitz) Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $f: U \to \mathbb{R}^m$, $(t,y) \mapsto f(t,y)$ localement lipschitzienne en y. Soit le problème de Cauchy $(E) \begin{cases} y' = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. Pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ où f est k-lipschitzienne sur C_0 et où $M = \sup_{C_0} \|f\|$ et $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$, (E) admet une unique solution exacte $y: [t_0 - T, t_0 + T] \to U$

<u>Thm 28</u> (inversion locale) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. S'il existe $a \in U$ tel que Df_a soit un isomorphisme linéaire, alors il existe un voisinage ouvert V de a et un voisinage ouvert W de $f(a)$ tels que $f_{|V}$ soit un C^1-difféomorphisme de V sur W. Rou p'188

<u>Thm 29</u> (point fixe de Browder) Lac-Mas p'109 Dvpt
Soit H un espace de Hilbert et $E \subset H$ une partie non vide, convexe, fermée et bornée. Soit $T: E \to E$ une application telle que : $\forall (x,y) \in E$, $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$.
Alors T admet un point fixe dans E.

III - Espaces de Banach

A - Définitions et premières propriétés

<u>Déf 30</u> Un espace vectoriel normé est un espace de Banach s'il est complet

<u>Prop 31</u> Soit E un evn et F un espace de Banach alors $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace de Banach pour la norme subordonnée. Gou p'48

<u>Ex 32</u> En dimension finie, tous les evn sont des espaces de Banach

<u>Prop 33</u> Un evn est complet ssi toute série normalement convergente converge. BP p'161

<u>Thm 34</u> (Riesz-Fisher) BP p'161
1 - pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'evn $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet
2 - soient $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p(\mu)$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$
Si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$, il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_n$ et $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ tels que $\forall n \geq 0$, $|f_{\varphi(n)}| \leq g$ μ-pp et $f_{\varphi(n)} \to f$ μ-pp

<u>Appli 35</u> (de la prop. 33)
• cela permet de définir $\exp(A)$ pour $A \in M_n(\mathbb{K})$
• soit E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tq $|||u||| < 1$. Gou p'49
Alors $Id - u$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.
Corollaire : $GL(E)$ est un ouvert.

B - Lemme de Baire et conséquences

Bre p.15 **Lemme 35** Soit X un espace métrique complet. Alors c'est un espace de Baire i.e toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Cor 36 Les espaces de Banach sont de Baire

Gou p.399 **App 37** Un evn admettant une base dénombrable n'est jamais complet.

Thm 38 (Banach-Steinhaus) Soit E un espace de Banach
Gou p.404 et F un evn. Soit $H \subset \mathcal{L}(E,F)$. On a l'alternative :

- soit $(|||f|||)_{f \in H}$ est bornée dans $\mathbb{R}$
- soit $\exists x \in E$, $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$

App 39 il existe une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0.

Bre p.18 **Thm 40** (de l'application ouverte) Soient E et F deux espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu surjectif de E sur F. Alors T est ouverte.

Bre p.19 **Cor 41** Soient E et F des espaces de Banach et T un opérateur linéaire continu bijectif de E sur F. Alors T^{-1} est continu.

App 42 La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Bre p.20 **Thm 43** (graphe fermé) Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ un opérateur linéaire tel que le graphe de T soit fermé dans $E \times F$. Alors T est continu.

Z-Q p.304 **Ex 44** E espace de Banach, F sev fermé de E. On a équivalence entre :
i) il existe une projection linéaire continue de E sur F
ii) il existe un sev fermé G de E tq $E = F \oplus G$

Ex 45 la complétude est essentielle :
soit $\phi : (C^1[0,1], \|.\|_\infty) \to (C^0[0,1], \|.\|_\infty)$, $f \mapsto f'$
ϕ a un graphe fermé mais n'est pas continue.

IV - Espaces de Hilbert

A - Définition et premiers exemples

H-L p.84 **Def 46** Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée. On les notera $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$

Ex 47 $(\mathbb{C}^n, \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i)$ et $(L^2(\Omega), \langle u,v \rangle = \int uv)$

B - Projection sur un convexe fermé

Thm 48 (projection sur un convexe fermé) Soit C une partie fermée convexe non vide de H. Alors $\forall x \in H, \exists ! y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x,C)$. H-L p.91
Ce point, appelé projection de x sur C et noté $P_C(x)$ est caractérisé par : $y \in C$ et $\forall z \in C$, $Re \langle x-y \mid z-y \rangle \leq 0$

Thm 49 (projection sur un sev fermé) Soit H un espace de Hilbert et F un sev fermé de H. Alors pour $x \in H$, le projeté $P_F(x)$ de x sur F est l'unique élément $p \in H$ tel que $p \in F$ et $(x-p) \in F^{\perp}$. De plus, $P_F : H \to F$ est linéaire continue et surjective. On a $H = F \oplus F^{\perp}$ OA p.98

App 50 Définition de l'espérance conditionnelle.

C - Bases hilbertiennes

Déf 51 Soit H un espace de Hilbert. On appelle base hilbertienne de H toute famille orthonormée totale de H. Bre p.86

Ex 52 $(e^{int})_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de L^2

Th 53 Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbert. Bre p.56

Th 54 (Parseval) Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de H. Alors Bre p.56
1 - $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ et 2 - $\forall x \in H$, $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

App 55 Calcul de $\sum_{n \geq 1} 1/n^4$

D - Dualité

Thm 56 (représentation de Riesz) Soit $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. L'application $H \to H'$, $y \mapsto \phi_y = \langle \cdot , y \rangle$ est une isométrie surjective H-L p.96

App 57 existence et unicité de l'adjoint

App 58 (théorème de Radon-Nykodym)
Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable et μ, ν 2 mesures finies sur $(X, \mathcal{B})$. O.A p.96
Si $\forall A \in \mathcal{B}$, $\nu(A) \leq \mu(A)$ alors il existe une fonction f mesurable telle que f soit la densité de ν par rapport à μ. ie telle que $\forall A \in \mathcal{B}$, $\nu(A) = \int_X \mathbb{1}_A(x) f(x) d\mu(x)$

Thm 59 (dualité dans les L^p) Soit $p \in]1,2]$.
L'application $\varphi \left| \begin{array}{l} L^q \to (L^p)' \\ g \mapsto (\varphi_g : f \mapsto \int_0^1 fg) \end{array} \right.$
est une isométrie linéaire surjective

Dvpt

Autres développements possibles :

- théorème de Cauchy-Lipschitz
- théorème de Riesz-Fischer
- théorème d'échantillonage de Shannon
- (théorème de Banach-Steinhaus + application)

Biblio :

Gou : GOURDON, Les Maths en tête, Analyse

Hau : HAUCHECORNE, Les Contre-Exemples en Mathématiques

Hag : EL HAGE HASSAN, Topologie et espaces normés

Que : QUEFFELEC, Topologie

Dem : DEMAILLY, Analyse Numérique et équations différentielles

Rou : ROUVIERE, Petit Guide de Calcul Différentiel

Lac-Mas : LACOMBE et MASSAT, Analyse fonctionnelle

BP : BRIAN et PAGES, Théorie de l'Intégration

Bre : BREZIS, Analyse fonctionnelle

Z-Q : ZULLY et QUEFFELEC, Analyse pour l'Agrégation

H-L HIRSCH et LACOMBE, Elements d'Analyse Fonctionelle

O-A : BECK, MALICK et PEYRÉ, Objectif Agregation