205

Espaces complets. Exemples et applications.

I. Généralités

cadre : (X,d) espace métrique.

1) Premières définitions et propriétés, exemples

[ACL] def : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (X,d).
$(u_n)_n$ est dite de Cauchy si :
$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall p,q\geq N, d(u_p,u_q)<\varepsilon$

prop : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (X,d), alors :
$(u_n)_n$ convergente $\Rightarrow$ $(u_n)_n$ de Cauchy $\Rightarrow$ $(u_n)_n$ bornée

Ex : les suites suivantes sont de Cauchy mais ne convergent pas :
$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $(]0,1],|.|)$, $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(\mathbb{Q},|.|)$

[HAG] prop : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy
si $(u_n)_n$ admet une valeur d'adhérence alors $(u_n)_n$ converge

[HAG] prop : l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy

[HAG] def : · (X,d) est complet si toute suite de Cauchy de (X,d) est convergente
· un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach

[HAG] Ex : · $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ munis des distances usuelles sont complets
· $(C_b(X,Y), d_\infty)$, X ensemble, Y complet, est complet
· $(]0,1],|.|)$, $(\mathbb{Q},|.|)$ ne sont pas complets

[HAU] Rq : la notion de complétude n'est pas topologique :
$d_1 : (x,y)\mapsto |x-y|$ et $d_2 : (x,y)\mapsto \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$ sont des distances topologiquement équivalentes sur $]0,1]$, mais $(]0,1],d_1)$ n'est pas complet alors que $(]0,1],d_2)$ est complet

Thm (Riesz-Fischer) : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d\geq 1$ [BRE]
soit $p\in[1,+\infty]$, alors : DEV.1
(i) $L^p(\Omega)$ est complet
(ii) de toute suite convergente dans $L^p(\Omega)$ on peut extraire une suite convergeant p.p. sur Ω

2) Propriétés des espaces complets

prop : soit A une partie de (X,d), alors :
· A complet $\Rightarrow$ A fermé [HAG]
· (X,d) complet et A fermé $\Rightarrow$ A complet

App : $(C_0(\mathbb{R}), d_\infty)$ est fermé dans $(C_b(\mathbb{R}), d_\infty)$ donc est complet [HAG]

prop : un espace métrique compact est complet

prop : soit $((X_n,d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques [HAG]
alors $(\prod_{n\geq 0} X_n, d)$ est complet $\Leftrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}$, (X_n,d_n) est complet
(d distance produit)

prop : tout evn de dimension finie est complet

prop : (X,d) est complet ssi toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide [QUE]

App : Thm de Bolzano-Weierstrass dans le cas réel

prop : un evn est complet ssi toute série normalement convergente est convergente [B-P]

App : soit E un espace de Banach, $u\in\mathcal{L}_c(E)$ tq. $\|u\|<1$ [GOU]
alors $id-u$ est inversible et $(id-u)^{-1}=\sum_{n\in\mathbb{N}} u^n$

3) Complété

Thm (prolongement) : soit (X,d), (Y,d') espaces métriques, A dense dans X, $f : A\to Y$ uniformément continue [HAG]
si (Y,d') est complet, alors f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : X\to Y$, et $\tilde{f}$ est unif. continue

[HAG] **Thm** : (i) il existe $(\hat{X}, \hat{d})$ espace métrique complet et $i : X \to \hat{X}$ une application isométrique tq. $i(X)$ soit dense dans $\hat{X}$
(ii) si (Y, d') et $j : X \to Y$ vérifient (i), alors :
$\exists !\ \varphi : \hat{X} \to Y$ continue tq. le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & Y \\ & \hat{X} \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

de plus, φ est une isométrie de $\hat{X}$ sur Y

on définit ainsi le complété de X à isométrie près

Ex :
- $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$
- $(C_0(\mathbb{R}), d_\infty)$ est le complété de $(C_c(\mathbb{R}), d_\infty)$
- $(L^p([0,1]), \|.\|_p)$ est le complété de $(C([0,1]), \|.\|_p)$

II. Théorème du point fixe de Picard et applications

[HAG] **Thm (Picard)** : (X, d) espace métrique complet
$f : X \to X$ contractante
alors f possède un unique point fixe $a \in X$
et $\forall x \in X$, $\lim_{n \to \infty} f^n(x) = a$

C-ex :
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$ est 1-lipschitzienne mais n'a pas de point fixe ($\mathbb{N}$ est complet)
- $f :]0,1] \to]0,1]$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ est contractante mais n'a pas de point fixe ($]0,1]$ non complet)

Rq : on n'a pas : $d(f(x), f(y)) < d(x,y),\ \forall x,y \Rightarrow f$ contractante
par ex, $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ non contractante.

[HAG] **Cor** : le théorème reste vrai si on suppose seulement $\exists p \in \mathbb{N}^*$, f^p contractante
Rq : si f^p est contractante, f n'est pas forcément continue
par ex, $f := \mathbb{1}_{]0,1[}$ non continue sur $\mathbb{R}$ et $f \circ f = 0$

Applications

Thm (Cauchy-Lipschitz) : soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) \in U$, [Alb]
$\varphi : U \to \mathbb{R}$ continue localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = \varphi(t, X) \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$ admet une unique solution maximale DEV 2

Thm (inversion locale) : soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, [Rou]
$f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tq. $Df(a)$ est inversible alors il existe V voisinage ouvert de a et W voisinage ouvert de $f(a)$ tq. $f_{|V}$ soit un difféo de classe C^1 de V sur W

III. Théorème de Baire et applications

Thm (Baire) : (X, d) espace métrique complet [Alb]
si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts denses dans X, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est dense dans X

Applications

Prop : un evn à base dénombrable n'est pas complet [GOU]
Prop : l'ensemble des fonctions continues dérivables nulle part de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est dense dans $(C([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ [GOU]

Thm (application ouverte) : soit E, F deux espaces de Banach, soit $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ surjectif [BRE]
alors T est ouverte

Cor : soit E, F deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ bijectif, alors T^{-1} est continue

App: la transformée de Fourier $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

Thm (graphe fermé) : soit E, F deux espaces de Banach, soit $T: E \to F$ linéaire tq. le graphe de T soit fermé dans $E \times F$ alors T est continu [BRE]

C-ex: $(\mathcal{C}^1([0,1]), \|.\|_\infty) \to (\mathcal{C}^0([0,1]), \|.\|_\infty)$, $f \mapsto f'$ a un graphe fermé mais n'est pas continue

Thm (Banach-Steinhaus) : soit E un espace de Banach soit F un evn soit $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$, alors : [GOU]

$$\left(\forall x \in E, \sup_{f \in H} \|f(x)\| < \infty\right) \Leftrightarrow \sup_{f \in H} \|f\| < \infty$$

App: il existe une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0. [GOU]

- la limite simple d'une suite d'applications linéaires continues est linéaire et continue

IV. Espaces de Hilbert

déf: un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ est appelé espace de Hilbert s'il est complet [H-L]

Ex: $\mathbb{C}^n$ muni de $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$L^2(\Omega)$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \overline{g}$

on se place désormais dans un espace de Hilbert E

Thm (projection sur un convexe fermé) : soit C une partie fermée, convexe et non vide de E, alors : [H-L]

$\forall x \in E, \exists! y \in C$ tq. $\|x-y\| = d(x, C)$

y est noté $P_C(x)$ et appelé projection de x sur C, il est caractérisé par :

$$y \in C \text{ et } \forall z \in C, \ \mathrm{Re}\langle x-y, z-y \rangle \leq 0$$

Thm (projection sur un sev fermé) : soit F un sev fermé de E, alors $P_F : E \to F$ est linéaire et continue, si $x \in E$, $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in E$ tq: [H-L]

$y \in F$ et $x - y \in F^\perp$

$E = F \oplus F^\perp$

déf: une base hilbertienne est une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E tq: [BRE]

(i) $\|e_n\| = 1 \ \forall n$, $\langle e_n, e_m \rangle = 0 \ \forall n \neq m$

(ii) $E = \overline{\mathrm{vect}(e_n)}$

Rq: une base hilbertienne n'est pas une base algébrique

Ex: $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$

Thm: tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne [BRE]

cor: tout espace de Hilbert séparable est isomorphe et isométrique à ℓ^2

Thm (Parseval) : soit $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de E, alors : [BRE]

$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} |\langle x, e_i \rangle|^2$ et $x = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \langle x, e_i \rangle e_i$

App: calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Thm (représentation de Riesz) : l'application $E \to E'$, $y \mapsto \langle ., y \rangle$ est une isométrie surjective [H-L]

i.e. $\forall \phi \in E', \exists! y \in E$ tq. $\forall x \in E, \phi(x) = \langle x, y \rangle$

App: existence et unicité de l'adjoint.

Références :

- [Alb] : ALBERT, Topologie
- [HAG] : EL HAGE HASSAN, Topologie générale et espaces normés
- [HAU] : HAUCHECORNE, Les contre-exemples en Mathématiques
- [BRE] : BREZIS, Analyse fonctionnelle
- [QUE] : QUEFFELEC, Topologie
- [B-P] : BRIAN-PAGES, Théorie de l'intégration
- [GOU] : GOURDON, Analyse
- [ROU] : ROUVIERE, Petit guide de calcul différentiel
- [H-L] : HIRSCH-LACOMBE, Éléments d'analyse fonctionnelle.