205

Espaces complets. Exemples et applications.

Cadre (X,d) un espace métrique (e.m)
(Y,d') ...

I) Généralités

1) Définitions

Déf: Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans (X,d) est dite de Cauchy si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, d(x_n,x_m) < \varepsilon$

prop: • Toute suite convergente de (X,d) est de Cauchy, mais la réciproque est fausse ($(\frac{1}{n})_{n>0}$ est de Cauchy mais ne cv pas dans $]0,1]$)
• Toute suite de Cauchy est bornée.

Déf: • (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans (X,d) est convergente. $A \subset X$, A est complet si l'e.m induit l'est.
• Un espace vectoriel normé (EVN) complet est appelé Banach.

ex: • $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet, mais $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas complet.
• $B(X,Y) = \{f : X \to Y \text{ bornées}\}$ si (Y,d) complet, alors $(B(X,Y), d_\infty)$ complet.
• $(L^p, \|\ \|_p)$ est complet (thm de Riesz-Fischer)

Rmq: Dans les espaces complets, on peut vérifier la convergence d'une suite sans connaître la limite.

2) Propriétés générales

prop: • L'image d'une suite de Cauchy par une appl° unif^t C^0 est de Cauchy.
• Soit $f : (X,d) \to (Y,d')$ un homéomorphisme.
Si f est unif^t C^0, et Y complet, Alors X est complet.

Coro: Soit X un ensemble, d et d' des distances unif^t équivalentes sur X.
Alors : les e.m (X,d), (X,d') sont simultanément complets ou non.

ex: $(\mathbb{R}^n, d_1), (\mathbb{R}^n, d_2), (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ sont simultanéments complets.

prop: Si $A \subset X$ est complet, alors il est fermé dans X.
• $(\bar{A} = X$ et $A \neq X) \Rightarrow A$ non complet.
• $((X,d)$ complet et A fermé$) \Rightarrow A$ complet

ex: Si (Y,d) est complet, alors $(C_b(X,Y), d_\infty)$ est complet.

prop: le produit fini d'espaces complets est complet pour la distance produit.

prop: LCSSE : (i) (X,d) est complet
(ii) l'intersection de toute suite décroissante $(F_n)_{n\geq 0}$ de fermés non vides de (X,d) tq $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(F_n) = 0$ contient un unique point.

Appli: Théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas réel.

3) Théorème du point fixe et applications

Thm: Soit (X,d) un e.m complet et $f : X \to X$ une appl° contractante
Alors f possède un unique point fixe $a \in X$. et $\forall x \in X$, $a = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$
$d(a, f^n(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x))$

Appli: (Méthode de Newton)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un voisinage d'un de ses zéros.
On cherche à approximer ce zéro, on définit $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
Alors F est contractante et l'unique point fixe de F est le zéro.

Autres applications | Théorèmes de Cauchy-Lipschitz et d'inversion locale.

4) Complété d'un espace métrique

Thm (de prolongement)
Soient $(X,d), (Y,d')$ des e.m, A une partie dense dans X et $f : A \to Y$ une application unif^t C^0. Si (Y,d') est complet, f se prolonge de manière unique en une appl C^0 $\tilde{f} : X \to Y$.
De plus, $\tilde{f}$ est unif^t C^0.

Théo (complétion) Soit (X,d) un e.m

- Il existe $(\hat{X},\hat{d})$ complet et $i : X \longrightarrow \hat{X}$ isométrique tq $i(X)$ soit dense dans $\hat{X}$.
- Si (Y,d') est complet et s'il existe $j : X \longrightarrow Y$ isométrique tq $j(X)$ soit dense dans Y.

  Alors $\exists !\ \varphi : \hat{X} \longrightarrow Y$ continue tq le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ \hat{X} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

  soit commutatif.

Rmq : le complété d'un e.m est unique à isométrie près

ex : . $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ donc $(\mathbb{R},|\ |)$ est le complété de $(\mathbb{Q},|\ |)$

. $(C_0(\mathbb{R}), d_\infty)$ est complet et c'est le complété de $C_c(\mathbb{R})$

II) Théorème de Baire et applications aux Banach.

1) Théorème de Baire et quelques applications

Thm (de Baire)

(X,d) un e.m complet, alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans (X,d) est dense dans (X,d).

(*) (Ou de manière équivalente, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides dans X est d'intérieur vide dans X.

Appli : Un evn $(E, \|\ \|)$ à base dénombrable n'est pas complet

Lemme : Soient (E,d) un e.m vérifiant (*), et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés de E tq : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$.

Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est un ouvert dense dans E.

Applᵒ : a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$

b) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tq $\forall x>0$, $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Alors $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

c) L'ensemble des fonctions continues de $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ nulle part dérivables est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$.

2) Conséquences dans les Banach

a) Généralités sur les Banach

prop : Un evn est complet ssi toute série CV absolument converge

ex : . $\mathbb{R}^n$ muni de n'importe quelle norme est complet

. $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ est un Banach

. $(L_p, \|\ \|_p)$ pour $1\leq p\leq\infty$ est un Banach

. $(\ell_p, \|\ \|_p)$ et $(c_0, \|\ \|_\infty)$ sont des Banach :

. $(\mathbb{Q}, |\ |)$ n'est pas un banach

. $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un banach (quelle que soit la norme).

ex : si F est un banach, $\mathcal{L}(E,F)$ est un Banach pour $|||\ |||$

E un evn sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Applᵒ : Soit E un banach et $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $|||u||| < 1$

Alors $id - u$ est inversible et son inverse est continu.

b) Théorèmes fondamentaux découlant du théorème de Baire

Thm (application ouverte).

Soient E, F 2 espaces de Banach.

Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective alors T est ouverte

(ie pour tout ouvert Ω de E, $T(\Omega)$ est un ouvert de F)

Coro (Thm de Banach) : Soient E, F 2 Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective alors T^{-1} est continue.

pf
ou

Thm (Banach-Steinhaus)

Soit E un Banach, F un evn.
Soit $H \subset \mathcal{L}(E,F)$
Alors • ou bien $(|||f|||)_{f\in H}$ est borné
• ou bien $\exists x \in E$ tq $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$

Appli: Il existe une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0.
(Mq: $\ell_n : C_{2\pi} \to \mathbb{C}$ $f \mapsto \sum_{p=-n}^{n} c_p(f) \in \mathcal{L}(C_{2\pi}, \mathbb{C})$ et $|||\ell_n||| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. conclure)

III) Espaces de Hilbert

• $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

• **Déf**: • Un espace préhilbertien est un couple $(E, \langle , \rangle)$, où E est un $\mathbb{K}$ ev et $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.
• Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien qui est aussi de Banach pour la norme associée au produit scalaire

ex: • $(\ell^2, \| \|_2)$, où $\| \|_2$ est la norme issue du produit scalaire $\langle x,y \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$, est un espace de Hilbert

• Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $(L^2(\Omega), \| \|_2)$, où $\| \|_2$ est issue du produit scalaire $\langle f,g \rangle = \int_\Omega f(t) g(t)\, dt$ est un espace de Hilbert.

• $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ muni du p.s $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)}\, dt$ est un espace préhilbertien mais pas de Hilbert.

Théorème (de projection sur un convexe fermé)

1vpt
dans
le cas
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$
Gou

Soit C une partie fermée, convexe et non vide de H (un esp de Hilbert)
Alors $\forall x \in H$, $\exists! y \in C$ tq: $\|x-y\| = d(x, C)$. Ce point est appelé projection de x sur C et noté $P_C(x)$. Et on a:
$\forall z \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle) \leq 0$

Thm (projection sur un sev fermé)

Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sev fermé de H.
Pour $x \in H$, le projeté $P_F(x)$ de x sur F est l'unique élément $p \in H$ qui vérifie : $p \in F$ et $x - p \in F^\perp$.
De plus $P_F : H \to F$ est linéaire, continue, surjective et on a: $H = F \oplus F^\perp$

Appli: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une v.a et $\mathcal{A}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.
On appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{A}$, notée $\mathbb{E}[X|\mathcal{A}]$, la projection orthogonale de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Ref: • Nawfal El Hage Hassan (Pour tous les points de cours)
• Gourdon pour dvpts et applicat° du Thm de Baire
• Brezis : Riesz-Fischer et un thm de Cauchy Lipschitz
• Rouvière : pour le thm d'inversion locale.

Théorème de la projection sur un convexe fermé

Ref : Gourdon, Analyse p 407

<u>Théorème</u> : Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, soit $C \subset H$ un convexe fermé, soit $x \in H$. Alors il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x,C) := \inf_{z \in C} \|x-z\|$.

<u>Preuve</u> : 1) Posons $\delta = d(x,C)$. Il existe une suite $(y_n) \in C$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \delta$. On veut montrer que (y_n) converge vers l'élément $y \in C$ recherché. Comme H est complet, montrons que (y_n) est de Cauchy.

• La norme $\|.\|$ étant issue d'un produit scalaire, elle vérifie l'identité du parallélogramme : $\forall x,y \in H$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
On a donc, $\forall p,q \in \mathbb{N}$,

$$\|(x-y_p)+(x-y_q)\|^2 + \|(x-y_p)-(x-y_q)\|^2 = 2\left(\|x-y_p\|^2 + \|x-y_q\|^2\right)$$

ie $$\|2x-y_p-y_q\|^2 + \|y_q-y_p\|^2 = 2\left(\|x-y_p\|^2 + \|x-y_q\|^2\right) \quad (*)$$

• Comme C est convexe, $\frac{y_p+y_q}{2} \in C$ $\forall p,q \in \mathbb{N}$. Donc $\|x - \frac{y_p+y_q}{2}\| \geq \delta$ d'où $\|2x-y_p-y_q\|^2 \geq 4\delta^2$. Avec $(*)$ on en déduit :

$$\|y_q-y_p\|^2 \leq 2\left(\|x-y_p\|^2 - \delta^2 + \|x-y_q\|^2 - \delta^2\right)$$

Comme $\|x-y_p\| \xrightarrow[p\to\infty]{} \delta$, on en déduit que (y_n) est de Cauchy, et donc converge vers $y \in H$. Or, $(y_n) \in C$ et C est fermé donc $y \in C$.
Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \|x-y\| = \delta$.

2) Unicité : Supposons qu'il existe $z \neq y \in C$ tel que $\|x-z\| = \delta$.
On définit la suite (y_n) de C par : $y_n = \begin{cases} y & \text{si } n \text{ pair} \\ z & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$. Alors (y_n) vérifie $\|x-y_n\| = \delta$ $\forall n \in \mathbb{N}$, en particulier $\|x-y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta$ donc par 1) (y_n) converge. Donc $y = z$, d'où l'unicité.

On note maintenant x_C cet élément, appelé le projeté orthogonal de x sur C.

<u>Caractérisation de x_C</u> : $\forall z \in C, \ \langle z - x_C, x - x_C \rangle \leq 0$.

<u>Preuve</u> : 1) Soit $y \in C$. Supposons que $\forall z \in C, \ \langle z-y, x-y \rangle \leq 0$.

Montrons que $y = x_C$.

$$\forall z \in C, \ \|z-x\|^2 = \|(z-y)-(x-y)\|^2$$
$$= \|z-y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\langle z-y, x-y\rangle$$
$$\geq \|z-y\|^2 + \|x-y\|^2$$
$$\geq \|x-y\|^2.$$

Donc $\|z-x\| \geq \|x-y\| \ \forall z \in C$. De plus, $y \in C$ donc $\|y-x\| = d(x, C)$ et par ce qui précède, $y = x_C$.

2) Soit $z \in C$, montrons que $\langle z - x_C, x - x_C \rangle \leq 0$.

- $\|x-z\|^2 \geq \|x - x_C\|^2$ car $z \in C$. De plus,

$$\|x-z\|^2 = \|(x-x_C)-(z-x_C)\|^2$$
$$= \|x-x_C\|^2 + \|z-x_C\|^2 - 2\langle x-x_C, z-x_C\rangle$$

Donc $\|z-x_C\|^2 - 2\langle x-x_C, z-x_C\rangle \geq 0$. (#).

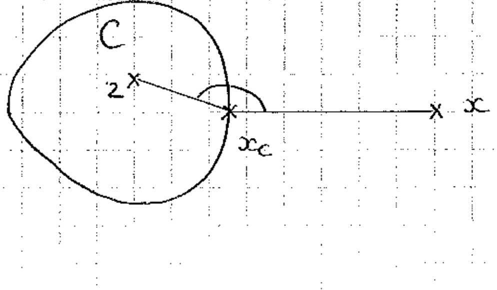
- On veut maintenant se débarrasser du terme $\|z-x_C\|^2$, pour cela on pose $z = \lambda z_0 + (1-\lambda)x_C$ pour $\lambda \in [0,1]$ et $z_0 \in C$, donc C étant convexe, $z \in C$. On applique (#) à z :

$$\|\lambda z_0 + (1-\lambda)x_C - x_C\|^2 - 2\langle x-x_C, \lambda z_0 + (1-\lambda)x_C - x_C\rangle \geq 0$$

ie $\lambda \|z_0 - x_C\|^2 - 2\langle x - x_C, z_0 - x_C\rangle \geq 0$

Et en faisant tendre λ vers 0, on obtient $\langle x - x_C, z_0 - x_C\rangle \leq 0$ et ce, $\forall z_0 \in C$.

<u>Illustration</u> :



L'angle formé par $x - x_C$ et $z - x_C$ est supérieur à 90°, $\forall z \in C$, $\forall x \in H$.

Théorème de Banach-Steinhaus et application

Ref : Gourdon, Analyse p 404 & 405

Théorème : Soit E un espace de Banach, F un evn. On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ev des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Alors soit $(|||f|||)_{f\in H}$ est bornée, soit il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$.

Preuve : $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $\Omega_k = \{x \in E \,/\, \sup_{f\in H} \|f(x)\| > k\}$

- Ω_k est ouvert : si $x_0 \in \Omega_k$, $\exists f \in H$ tel que $\|f(x_0)\| > k$. Comme f est continue, $\exists \rho > 0$ tel que $\|f(x)\| > k$ $\forall x$ tel que $\|x - x_0\| < \rho$. Donc la boule $B(x_0, \rho) \subset \Omega_k$, d'où Ω_k ouvert.
- Si chaque Ω_k est dense dans E alors, comme E est complet, le théorème de Baire implique que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ est dense dans E, et en particulier $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \neq \emptyset$.

  En choisissant $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ alors $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$
- Sinon, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que Ω_k n'est pas dense dans E. C'est-à-dire : $\exists x_0 \in E$, $\exists \rho > 0$, $B(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \emptyset$. Donc $\forall x \in B(x_0, \rho)$, $\sup_{f\in H} \|f(x)\| \leq k$. On en déduit :

$$\forall x \in B(0,\rho),\ \forall f \in H,\quad \|f(x)\| = \|f(x+x_0) - f(x_0)\|$$
$$\leq \|f(x+x_0)\| + \|f(x_0)\|$$
$$\leq 2k \quad \text{car } x + x_0 \text{ et } x_0 \in B(x_0, \rho).$$

Par continuité de chaque $f \in H$, l'inégalité reste vraie sur la boule fermée $B_f(0,\rho)$.

Ainsi, $\forall f \in H$, $\forall x \in E \,/\, \|x\| = 1$, $\|f(x)\| = \frac{1}{\rho} \|f(\rho x)\| \leq \frac{2k}{\rho}$

donc $\forall f \in H$, $|||f||| \leq \frac{2k}{\rho}$ donc $(|||f|||)_{f\in H}$ est bornée.

Application: Existence de fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

On note $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques et continues. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'application $\ell_n : \begin{cases} C_{2\pi} \to \mathbb{C} \\ f \mapsto \sum_{p=-n}^{n} c_p(f) \end{cases}$

où $c_p(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ipt}\, dt$.

On va montrer que $\ell_n \in \mathcal{L}_c(C_{2\pi}, \mathbb{C})$ et que $\lim_{n \to +\infty} |||\ell_n||| = +\infty$.

Le théorème de Banach-Steinhaus permettra de conclure.

Preuve: 1) ℓ_n est clairement une forme linéaire, montrons qu'elle est continue et calculons sa norme :

- La relation $\sum_{p=-n}^{n} e^{ipt} = \frac{\sin[(2n+1)t/2]}{\sin(t/2)}$ entraine $\forall f \in C_{2\pi}$,

$$\ell_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} f(t)\, dt$$

Donc, si $\|f\|_\infty = 1$, on a : $$|\ell_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right| dt. \quad (*)$$

Ainsi, ℓ_n est continue.

- Montrons que $|||\ell_n||| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right| dt$

$\forall \varepsilon > 0$, on définit :

$$f_\varepsilon : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \longmapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon} \end{cases} \quad \text{où } D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

On a $\|f_\varepsilon\|_\infty \leqslant 1$ et $f_\varepsilon \in C_{2\pi}$,

on montre facilement que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} |\ell_n(f_\varepsilon)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right| dt$

Avec $(*)$ on en déduit que : $$|||\ell_n||| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt.$$

2) Montrons que $\lim_{n \to +\infty} |||\ell_n||| = +\infty$.

$\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t/2)| \leqslant |t/2|$ donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$|||\ell_n||| \geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)t/2)}{t/2} \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du$$

par le changement de variable $u = (2n+1)t/2$.

Comme $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du$ diverge, on en déduit $\lim_{n \to +\infty} |||\ell_n||| = +\infty$.

3) $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est complet et $C_{2\pi}$ est fermé dans $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ donc complet,

par Banach-Steinhaus, il existe donc $f \in C_{2\pi}$ / $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\ell_n(f)| = +\infty$.

Autrement dit, la série de Fourier de f diverge en 0.