205 ESPACES COMPLETS. EXEMPLES ET APPLICATIONS

I/ Espaces complets [SR]

Dans cette partie, (E,d) est un espace métrique.

1) Suites de Cauchy.

Def 1 : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si $d(x_p,x_q) \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0$

Prop 2 : Toute suite convergente est de Cauchy.

Prop 3 : Toute suite de Cauchy est bornée, et converge si et seulement si elle admet une valeur d'adhérence.

Prop 4 : Si (F,d') est un autre espace métrique et $f : E \to F$ uniformément continue, alors l'image par f d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

Ex 5 : La suite donnée par $u_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ et $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ est une suite de rationnels qui converge (dans $\mathbb{R}$) vers $\sqrt{2}$. Elle est donc de Cauchy, mais ne converge pas dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$.

2) Espaces complets.

Def 6 : (E,d) est dit complet si toute suite de Cauchy converge.

Ex 7 : $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets, mais $\mathbb{Q}$ ne l'est pas.

Rq 8 : Cette notion est métrique et non topologique. En effet, $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ définit la topologie usuelle, mais $(\mathbb{R},d)$ n'est pas complet (considérer $x_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2^n}\right)$)

Def 9 : Un espace vectoriel normé est dit de Banach s'il est complet pour la distance induite par sa norme.

Prop 10 : Un produit fini d'espaces complets est complet.

Cor 11 : Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel (ou $\mathbb{C}$-ev) de dimension finie est complet.

Ex 12 : $\mathbb{R}_n[X]$ est complet, mais $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|P\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ ne l'est pas.

Prop 13 : Si (E,d) est complet, et $F \subset E$ est un sous ensemble, alors F est complet $\Leftrightarrow$ F est fermé dans E.

Thm 14 : Il existe un espace métrique complet $\hat{E}$ et une isométrie $j : E \to \hat{E}$ telle que $j(E)$ est dense dans $\hat{E}$. De plus, si $(\hat{E}_1, j_1)$ est un couple ayant la même propriété, alors il existe $h : \hat{E} \to \hat{E}_1$ une isométrie telle que $j_1 = h \circ j$. $\hat{E}$ est appelé complété de E.

Ex 15 : $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$.
$[0,1]$ est le complété de $]0,1]$.

3) Premiers exemples d'espaces complets.

Prop 16 : Soit X un espace métrique. Si E est un Banach alors l'espace $\mathcal{C}_b(X,E)$ des fonctions continues bornées sur X est un espace de Banach.
En particulier, si X est compact, $\mathcal{C}(X,E)$ est un Banach.

Def 17 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et (K_n) une suite croissante de compacts telle que $\bigcup_{n\geq 0} K_n = \Omega$. On définit alors sur l'espace $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ la distance $d(f,g) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \min\left(2^{-n}, \sup_{x\in K_n} |f(x)-g(x)|\right)$
C'est une distance qui caractérise la convergence uniforme sur tout compact.

Prop 18 : Muni de cette distance, $\mathcal{C}(\Omega,\mathbb{C})$ est complet.

Cor 19 : Muni de cette même distance, l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est complet.

Rq 20 : Cet espace n'est en revanche pas un Banach, puisque cette distance ne provient pas d'une norme.

Thm 21 [Riesz-Fisher] : Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^d)$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach.

II/ Conséquences de la complétude.

1) Prolongement des applications uniformément continues.

Thm 22 : Soit E, F deux espaces métriques, F étant complet. Soit $X \subset E$ une partie dense et $f : X \to F$ uniformément continue. Alors il existe une unique fonction continue $\tilde{f} : X \to F$ qui prolonge f.

[HIR] p.18 **App 23** : Construction de l'intégrale de Riemann sur l'ensemble des fonctions réglées :
On peut définir sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ l'intégrale : $I\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{]x_i, x_{i+1}[}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_{i+1} - x_i)$, ce qui définit une application uniformément continue sur $\mathcal{E}$, dense dans l'espace des fonctions réglées, et qui s'étend donc de manière unique.

[FAR] p.125 **App 24** : Transformée de Fourier-Plancherel. Sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on peut définir la transformée de Fourier $f \mapsto \left(\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx\right)$, qui est uniformément continue. Elle se prolonge donc à $L^2(\mathbb{R})$ en la transformée de Plancherel.

2) Théorèmes de point fixe.

Thm 25 : Soit X un espace métrique complet et $F : X \to X$ contractante. Alors F admet un unique point fixe, et pour tout $a_0 \in X$, la suite définie par $a_{n+1} = F(a_n)$ converge vers ce point fixe. [Rouo pour Rq n-ème]

Rq 26 : La conclusion persiste si seulement l'un des itérés F^p de F est contractante.

App 27 : Théorème de Cauchy-Lipschitz.

App 28 : Théorème d'inversion locale : Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in \Omega$ tel que $D_a f$ est inversible. Alors f induit un difféomorphisme d'un voisinage de a sur son image.

App 29 : Théorème des fonctions implicites, puis étude des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$...

3) Théorème de Baire [Gou]

Thm 30 : Soit E un espace métrique complet. Alors toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Cor 31 : Tout espace vectoriel normé admettant une base (algébrique) dénombrable n'est pas complet.

Ex 32 : $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ n'est pas complet.

Ex 33 : L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles et dérivables nulle part est dense dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

DVT 1

Thm 34 : [Banach-Steinhaus] Soit E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}_c(E,F)$.
Alors . soit (f_i) est uniformément bornée
. soit il existe une partie dense $\Omega \subset E$ telle que
$\forall x \in \Omega,\ \sup_{i\in I} \|f_i(x)\| = +\infty$.

App 35 : Il existe des fonctions continues 2π-périodiques dont la série de Fourier diverge en 0.

Cor 36. Sous les hypothèses du théorème, si (f_i) converge simplement vers f, alors f est linéaire et continue.

III/ Espaces de Hilbert. [HIR]

1) Définition et résultats principaux.

Def 37 : Un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ est dit de Hilbert s'il est complet pour la norme associée à $(\cdot|\cdot)$.

Ex 38 : $\ell^2(\mathbb{N})$, $L^2(\mathbb{R}^d)$ sont des Hilbert.
. tout espace préhilbertien de dimension finie est un Hilbert.

Thm 39 : Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de E. Alors pour tout $x\in E$, il existe un unique $y\in C$ tel que $\|x-y\| = d(x,C)$. On note $y = P_C(x)$. Celui ci est caractérisé par : $\begin{cases} y\in C \\ \forall z\in C,\ \mathrm{Re}(x-y|z-y) \leq 0. \end{cases}$

App 40 : Construction de l'espérance conditionnelle sur $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$: [OUV] p155
si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$, et $X\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, il existe une unique v.a $Z\in L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$ telle que $\forall Y\in L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}(ZY)$. On note $Z = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$. On peut étendre cette notion à $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

Cor 41 : Soit F un sous espace de H un Hilbert. Alors :
. $F\oplus F^\perp = E$.
. F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$

App 42 : $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

2) Bases Hilbertiennes.

Def 43. Une base hilbertienne de H est une famille $(e_n)_{n\geq 0}$ orthonormale telle que $\mathrm{Vect}(e_n)$ est dense.

Thm 44 : [Bessel-Parseval] Si (e_n) est une base hilbertienne, alors :
. $\forall x\in H,\ \|x\|^2 = \sum |(x|e_i)|$
. $\forall x,y\in H,\ (x|y) = \sum (x|e_i)(e_i|y)$.

Ex 45 : $L^2([0,2\pi])$ est un Hilbert dont une base hilbertienne est $\left(\frac{1}{2\pi}e^{int}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
Le th. précédent permet en particulier le calcul de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$, ...

Ex 46. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert. On définit l'espace de Bergman
$A^2(\mathbb{D}) = \left\{ f\in H(\mathbb{D}) \;\middle|\; \int_{\mathbb{D}} |f|\, dx\, dy < +\infty \right\}$ muni du p.s $L^2(\mathbb{D})$.
Alors $A^2(\mathbb{D})$ est un Hilbert, dont une base hilbertienne est donnée par les . $e_n \left| \begin{array}{l} \mathbb{D} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n \end{array}\right.$; $n\in\mathbb{N}$

DVT 2

Références :

- [SR] Saint Raymond, Topologie, calcul différentiel et variable complexe.
- [HIR] Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle
- [FAR] Faraut, Calcul intégral
- [GOU] Gourdon, Analyse
- [OUV] Ouvrard, Probabilités 2

Développement n° 1

Théorème : Banach-Steinhaus

Soient E un Banach, F un evn, $(f_i)_{i\in I} \subset \mathcal{L}_c(E,F)$

Alors : ou bien $\exists M, \forall i \in I, |||f_i||| \leq M$

ou bien il existe une partie dense Ω de E

telle que $\forall x \in \Omega, \ \sup_{i\in I} \|f_i(x)\| = +\infty$

Démo : Soit $K \in \mathbb{N}$, posons $\Omega_K := \{x \in E \mid \sup_{i\in I} \|f_i(x)\| > K\}$

- Ω_K est ouvert pour tout K

  En effet, soit $x_0 \in \Omega_K$: $\exists i \in I, \|f_i(x_0)\| > K$

  f_i est continue : $\exists r > 0, \forall x \in B(x_0, r), \|f_i(x)\| > K$

  donc $B(x_0, r) \subset \Omega_K$

- Si $\forall K \in \mathbb{N}$, Ω_K est dense dans E :

  E est complet donc d'après le théorème de Baire : $\bigcap_{K\in\mathbb{N}} \Omega_K$ est dense dans E

  Or $\bigcap_{K\in\mathbb{N}} \Omega_K = \{x \in E \mid \sup_{i\in I} \|f_i(x)\| = +\infty\}$

  Donc $\Omega := \bigcap_{K\in\mathbb{N}} \Omega_K$ est dense dans E et tel que : $\forall x \in \Omega, \ \sup_{i\in I} \|f_i(x)\| = +\infty$

- Sinon, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que Ω_K n'est pas dense

  Alors : $\exists x_0 \in E, \exists \rho > 0, \ B(x_0, \rho) \cap \Omega_K = \emptyset$

  ie $\forall x \in B(x_0, \rho), \ \sup_{i\in I} \|f_i(x)\| \leq K$

  Soit $x \in B(0, \rho)$, soit $i \in I$, $\|f_i(x)\| \leq \|f_i(x + x_0)\| + \|f_i(x_0$

  $\leq 2K$

  Soit alors $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$,

  $$\forall i \in I, \quad \|f_i(x)\| = \frac{2}{\rho} \left\| f_i\left(\frac{\rho}{2} x\right) \right\| \leq \frac{4}{\rho} K$$

  D'où : $\forall i \in I, \ |||f_i||| \leq \frac{4}{\rho} K$

Application : Densité des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en 0

Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit $\ell_N : \begin{array}{l} \mathcal{C}_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C} \\ f \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) = S_N(0) \end{array}$

où $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$

- Soit $N \in \mathbb{N}$, ℓ_N est une forme linéaire. Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$.

$$\ell_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_N(t)\, dt$$

où $D_N(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin(t/2)} & \text{si } t \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[\\ 2N+1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

donc $|\ell_N(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|\, dt \, \|f\|_\infty$

Donc $\ell_N \in \mathcal{L}_c(\mathcal{C}_{2\pi}, \mathbb{C})$ et $|||\ell_N||| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|\, dt$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n \in \mathcal{C}_{2\pi}$ par : $f_n(t) = \dfrac{D_N(t)}{|D_N(t)| + 2^{-n}}$

$$\ell_N(f_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_N(t)^2}{|D_N(t)| + 2^{-n}}\, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|\, dt$$

D'où $|||\ell_N||| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)|\, dt$

- Soit $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |||\ell_N||| &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin(t/2)} \right| dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin(t/2)} \right| dt \\ &\geq \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left| \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{t} \right| dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{2N+1}{2}\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du \\ &\xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

- $\mathcal{C}_{2\pi}$ est complet et $\sup_{N \in \mathbb{N}} |||\ell_N||| = +\infty$
  donc le théorème de Banach-Steinhaus s'applique : il existe une partie Ω dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ telle que :
  $$\forall f \in \Omega, \quad \sup_{N \in \mathbb{N}} |\ell_N(f)| = +\infty$$
  ie : pour tout $f \in \Omega$, la série de Fourier de f diverge en 0.

Chapitre 6

Espace de Bergman

Références : Bayen, Margaria, *Espaces de Hilbert et opérateurs*, p 104

L'objectif de ce développement est d'étudier l'espace de Bergman

$$A^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dxdy < \infty \right\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$.

Lemme.

Pour tout K compact de $\mathbb{D}$, on a

$$\forall f \in A^2(\mathbb{D}),\ \|f\|_{\infty,K} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\ d(K,\mathbb{S}^1)} \times \|f\|_{L^2}.$$

Démonstration. Soit a un élément de $\mathbb{D}$. Comme $\mathbb{D}$ est ouvert, il existe r un réel strictement positif tel que $\mathbb{D}(a,r)$ soit inclus dans $\mathbb{D}$. D'après la formule de la moyenne :

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(a,r)} f(z) \, dxdy.$$

Alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |f(a)| &\leqslant \frac{1}{\pi r^2} \left(\int_{\mathbb{D}(a,r)} |f(z)|^2 \, dxdy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{D}(a,r)} dxdy \right)^{1/2} \\ &\leqslant \frac{\left(\pi r^2\right)^{1/2}}{\pi r^2} \|f\|_{L^2} \\ &= \frac{\|f\|_{L^2}}{\sqrt{\pi}\ r}. \end{aligned}$$

On fait alors tendre r vers $d(a,\mathbb{S}^1)$ pour obtenir

$$|f(a)| \leqslant \frac{\|f\|_{L^2}}{\sqrt{\pi}\ d(a,\mathbb{S}^1)}.$$

Étant donné que $d(K,\mathbb{S}^1) \leqslant d(a,\mathbb{S}^1)$, le résultat s'ensuit alors. □

Proposition.

$A^2(\mathbb{D})$ munit du produit scalaire de $L^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $A^2(\mathbb{D})$. Alors d'après le lemme précédent, on a pour tout compact K de $\mathbb{D}$:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \|f_n - f_m\|_{\infty,K} \leqslant \frac{\|f_n - f_m\|_{L^2}}{\sqrt{\pi}\ d(K, \mathbb{S}^1)}.$$

Ainsi, sur tout compact, (f_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ qui est complet pour la norme uniforme, donc quitte à prendre des compacts emboîtés, on a l'existence de f continue sur $\mathbb{D}$ et limite uniforme sur tout compact de (f_n). D'après le théorème de Weierstrass, f est holomorphe.
De plus, $L^2(\mathbb{D})$ est un espace complet donc (f_n) admet une limite g dans $L^2(\mathbb{D})$. Or, d'après le théorème de Riesz-Fischer, il existe une extractrice φ telle que $(f_{\varphi(n)})$ converge presque partout sur $\mathbb{D}$ vers g. Ainsi, $f = g$ presque partout sur $\mathbb{D}$ et f est un élément de $L^2(\mathbb{D})$. □

Pour toute la suite, on pose pour tout entier naturel n

$$e_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sqrt{\dfrac{n+1}{\pi}} z^n \end{array}.$$

Proposition.

La famille (e_n) forme une base hilbertienne de $A^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Le caractère orthonormée de (e_n) est immédiat, il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m \rangle &= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^n z^m \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{(n+1)(m+1)}}{\pi} \left(\int_{r=0}^{1} r^{n+m+1} \mathrm{d}r \right) \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} \mathrm{d}\theta \right) \\
&= \frac{2\pi\sqrt{(n+1)(m+1)}}{(n+m+2)\pi} \delta_{n,m} \\
&= \frac{2\pi(n+1)}{(2n+2)\pi} \delta_{n,m} \\
&= \delta_{n,m}
\end{aligned}$$

À présent, considérons f une fonction de $A^2(\mathbb{D})$ orthogonale à $\mathrm{Vect}(e_n)$. On note $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ et on a donc par supposition $c_n(f) = 0$.
Comme f est holomorphe sur $\mathbb{D}$, elle est analytique sur $\mathbb{D}$ et il existe (a_n) une suite de nombres complexes telle que

$$\forall z \in \mathbb{D} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} \overline{z}^n f(z)\ dxdy \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \left(\int_{|z|<r} \overline{z}^n f(z)\ dxdy \right) \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{|z|<r} \overline{z}^n z^k\ dxdy \right),
\end{aligned}$$

la première égalité provenant du théorème de convergence dominé et la deuxième du fait de la convergence normale sur tout compact de $\mathbb{D}$ de la série entière $\sum a_n z^n$. Or avec un changement de variables polaires, il vient :

$$\int_{|z|<r} \overline{z}^n z^k\ dxdy = \frac{2\pi\ r^{n+k+2}}{n+k+2} \delta_{k,n} = \frac{\pi\ r^{2n+2}}{n+1} \delta_{k,n},$$

donc

$$c_n(f) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{r\to 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\pi\ r^{2n+2}}{n+1} \delta_{k,n} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\ a_n\ \lim_{r\to 1} r^{2n+2} = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}\ a_n.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$. On en déduit $f = 0$ et la famille $(e_n)_n$ est bien une base hilbertienne. □