205

Espaces complets. Exemples et applications.

I Généralités sur les espaces métriques complets

<u>Déf ①</u> : • Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall p \geq N_\varepsilon ; \forall q \geq N_\varepsilon \quad d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$

• (X, d) est dit "complet", si toute suite de Cauchy de X, converge dans X.

<u>Ex / C.E ②</u> : • $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet.
• $(\mathbb{Q}, |.|)$ n'est pas complet.

<u>Prop ③</u> : (1) Toute suite convergente est de Cauchy.
(2) Toute suite de Cauchy est bornée.
(3) Toute suite de Cauchy qui possède une valeur d'adhérence est convergente.

<u>Prop ④</u> : La complétude est une propriété métrique. Ce n'est pas une propriété topologique.

<u>Ex ⑤</u> : • Soit $\|.\|$ une norme. $(\mathbb{R}, \|.\|)$ est complet.

• $\mathbb{R}$ et $]0, 1[$ sont homéomorphes, $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet, mais pas $(]0;1[, |.|)$.

<u>Th ⑥</u> [Complétion]
Soit (X, d) un espace métrique. Il existe $(\widehat{X}, \widehat{d})$ un espace métrique tel que :
(1) $(\widehat{X}, \widehat{d})$ est complet.
(2) Il existe $\sigma : X \hookrightarrow \widehat{X}$, ~~une~~ isométrique injective.
(3) $\overline{\sigma(X)} = \widehat{X}$
(4) $(\widehat{X}, \widehat{d})$ est unique à isomorphisme près.

$(\widehat{X}, \widehat{d})$ est appelé complété de (X, d).

<u>Ex ⑦</u> : $(\mathbb{R}, |.|)$ est le complété de $(\mathbb{Q}, |.|)$.

II Propriétés sur les espaces métriques complets

(1) Lien avec les notions topologiques

<u>Prop ⑧</u> : Un espace métrique compact est complet.

<u>CE ⑨</u> : $(\mathbb{R}, |.|)$ complet, mais non compact.

<u>Déf ⑩</u> : Soit $A \subseteq X$, A est une partie complète si $(A, d_{|A})$ est complet.

<u>Prop ⑪</u> : Soit $A \subseteq X$ fermée, et (X, d) complet, alors A est complète.

<u>Ex ⑫</u> : $\overline{B}(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ est complète.

<u>Prop ⑬</u> : Soient $(X_1, d_1) ; \dots ; (X_n, d_n)$ n espaces métriques.
On pose $X := \prod_{i=1}^{n} X_i$, $d_\infty(x; y) = \sup_{1\leq i\leq n} d_i(x_i, y_i)$; $\forall (x,y) \in X^2$
alors : (X, d_∞) est complet si et seulement si (X_i, d_i) est complet, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.

<u>Ex ⑬</u> : $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ est complet

<u>Déf ⑭</u> : (1) $A \subseteq X$ est précompacte si :
$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N}^* : \exists (x_1; \dots; x_n) \in X^n : \quad A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$
(2) A est relativement compacte si $\overline{A}$ est compacte.

<u>Prop ⑮</u> : (1) Si $A \subseteq X$ est précompacte alors A est relativement compacte.
(2) Si $A \subseteq X$ est relativement compacte, et (X, d) complet alors A est précompacte.

<u>App ⑯</u> [Théorème d'Ascoli]
Soit (X, d) compact, $(E, \|.\|)$ complet.
$A \subseteq (\mathcal{C}(X, E), \|.\|_\infty)$. Alors :
(i) A est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X, E)$
$\iff$ (ii) (1) $\forall x \in X$ $A(x) \subseteq E$ est relativement compacte
(2) A est équicontinue.

(2) Résultats fondamentaux et applications

Déf 17) $T : X \longrightarrow Y$ est dite contractante si elle est lipschitzienne de rapport $0 \leqslant k < 1$.

Th 18) [Point fixe, Picard]
Soit (X, d) complet. $T : X \longrightarrow X$ contractante.
Alors T admet un unique point fixe.

Dév 1

App 19) [Théorème de Cauchy-Lipschitz]
$(\mathcal{E})$ $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$. Soit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$

Alors il existe une unique solution à $(\mathcal{E})$, dans tout voisinage de t_0.

App 20) [Théorème d'inversion locale]
Soit $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$, Ω ouvert. Soit $x_0 \in \Omega$ tel que $D_{x_0} f \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors :
Il existe $\mathcal{U} \subset \Omega$ voisinage ouvert de x_0, tel que $\mathcal{V} = f(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ soit un voisinage ouvert de $f(x_0)$, tel que $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ réalise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.

Th 21) [Lemme de Baire]
Soit (X, d) complet. $(X_n)_{n \geq 1}$ suite de fermés, telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$. $\mathring{X}_n = \emptyset$, alors $\overset{\circ}{\overline{\bigcup_{n \geq 1} X_n}} = \emptyset$

App : 23) Théorème de Banach-Steinhaus (cf th 34)

Dév 2

Th 24) [Prolongement]
Soit $A \subseteq X$ dense dans (X, d), (Y, d) complet. $f : A \longrightarrow Y$ uniformément continue. Alors : (1) Il existe une unique application continue $g : X \longrightarrow Y$ prolongeant f
(2) g est uniformément continue

App 25) Extension de la transformation de Fourier de $L^1 \cap L^2$ à L^2.

II Espaces de Banach

Déf 26) Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Ex 27) $(\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ $(\mathcal{L}_c(E, F), \|\cdot\|)$

Prop 28) $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

App 29) [Théorème de Riesz-Fischer]
$(L^p(\mathbb{R}, \underset{\text{Lebesgue}}{\lambda}), \|\cdot\|_p)$ est un Banach, $\forall 1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Déf 30) $(X, \|\cdot\|)$; $(Y, \|\cdot\|)$ deux EVNs.
$T : X \longrightarrow Y$ linéaire.
(1) On dit que T est bornée si $\exists K \geq 0 : \forall x \in X \quad \|Tx\|_Y \leqslant K \|x\|_X$
(2) On dit que T est continue si : $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$:
$\left[x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x \implies T(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} T(x) \right]$

Prop 31) Avec les mêmes hypothèses sur T.
T est continue si et seulement si T est bornée.

CE 32) $T : (\mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$
$f \longmapsto f'$
n'est pas bornée.

Prop 33) En dimension finie, toute application linéaire est continue.

Th 34) [Banach-Steinhaus]
$(X, \|\cdot\|)$ Banach, $(Y, \|\cdot\|)$ EVN. $(T_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{L}_c(X, Y)$ telle que $\forall x \in X : \exists C_x > 0 : \forall \alpha \in I \quad \|T_\alpha x\| \leqslant C_x$
alors $\exists C > 0 : \forall \alpha \in I \quad \|T_\alpha\| \leqslant C$.

App 35 Il existe une fonction continue, telle que sa série de Fourier ne converge pas en 0.

IV - Espaces de Hilbert

(1) Définitions, premières propriétés. On supposera $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Hilbert.

Def 36: $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert, si H est un espace vectoriel, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire et de plus $(H, \|\cdot\|_H)$ est complet, pour la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

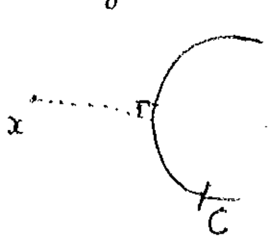
Ex 37: $\ell^2(\mathbb{C})$ pour $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \overline{y_i}$

$L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ pour $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Prop 38 [Inégalité de Cauchy-Schwarz]
$\forall (f,g) \in H^2$: $|\langle f ; g \rangle| \leq \|f\| . \|g\|$

Prop 39 [Identité du parallélogramme]
$\forall (u, v) \in H^2$
$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

App 40 [Projection sur un convexe fermé]
Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé, non vide. Soit $x \in H$.
$\Rightarrow \exists ! \, y \in C$: $\inf_{z \in C} \|x - z\| = \|x - y\|$



Corollaire 41 Soit $F \subset H$ sous espace vectoriel fermé. alors $H = F \oplus F^{\perp}$.

(2) Séparabilité

Def 42: $(e_i)_{i \in I} \subset H$ est une base hilbertienne de H si :
- $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormée.
- $\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$ est dense dans H. (totalité)

Def 43 H est séparable s'il existe une famille d'éléments dénombrable dense dans H.

Ex 44: $\ell^p(\mathbb{C})$, $L^p(\mathbb{C})$ pour $1 \leq p < +\infty$
$(\mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(\mathbb{C}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sont séparables.

CE 45 $\ell^\infty(\mathbb{C})$ n'est pas séparable.

Th 46 (1) Tout espace de Hilbert (de dimension infinie) séparable possède une base hilbertienne.
(2) En notant $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une telle base, on obtient:
$\forall f \in H \quad f = \sum_{i=0}^{+\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$
(3) Identité de Plancherel: $\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$

App 47 [Théorème de Riesz]
Tout espace de Hilbert séparable (de dimension $+\infty$) est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{C})$.

Références:

- X. Gourdon, Analyse, Ellipses
- H Queffélec, Topologie, Dunod
- H. Brézis, Analyse fonctionnelle.
- H Queffélec, C. Zuily, Analyse pour l'agrégation, Dunod
- A Friedman, Fundation of modern analysis.
- A. Bouvier, M. George, F. Le Lionnais Dictionnaire des mathématiques.
- P Dugac, Histoire des espaces complets, Revue d'histoire des sciences, 1984, Vol 37, n°1

Développement ① [Lemme de Baire | Banach Steinhaus |

Existence d'une fonction continue dont la série de Fourier ne converge pas en 0]

Lemme de Baire. (X, d) un espace métrique complet

$(X_n)_{n\geq 0}$ suite de fermés, tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mathring{X_n} = \emptyset$

alors $\widehat{\bigcup_{n\geq 0} X_n}^{\circ} = \emptyset$

Preuve : • Comme $(\mathring{A})^c = \overline{A^c}$, par passage au complémentaire il revient à montrer que $\overline{\bigcap_{n\geq 0} O_n} = X$; où $X_n^c = O_n$

$\overline{O_n} = X$

Idée : Montrons que tout ouvert de Ω rencontre $G := \bigcap_{n\geq 0} O_n$, on construit pour cela une suite (qui s'avèrera être de Cauchy), et on prouve que sa limite $x \in \Omega \cap G$.

Etape 1. Soit $\Omega \subseteq X$ un ouvert. Soit $x_0 \in \Omega$:

$\exists r_0 > 0 : B(x_0, r_0) \subset \Omega$

Comme $\overline{O_1} = X$ $B(x_0, r_0) \cap O_1 \neq \emptyset$

Donc il existe $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$;

$\exists r_1 > 0$ $r_1 < \frac{r_0}{2}$, et $\overline{B}(x_1, r_1) \subset O_1 \cap B(x_0, r_0)$

Par récurrence, on peut donc construire deux suites (x_n), (r_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} \overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \\ r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \text{ ie } r_n \leq \frac{r_0}{2^{n}} \end{cases}$

Etape 2. (x_n) est de Cauchy :

$\forall n, m \in \mathbb{N}$; $n > m$ $d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x_{m+1}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$

$\leq r_0\left(\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$\leq r_0 \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$

Par complétude : $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \in X$

Etape 3 : $x \in \Omega \cap G$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon$ $x \in B(x_n, \varepsilon) \subseteq B(x_{n-1}, r_{n-1}) \dots$

1

$x \in B(x_0, r_n) \Rightarrow x \in G$.

par la même occasion $x \in \Omega$. $\Rightarrow G \cap \Omega \neq \emptyset$ $\blacksquare$

<u>Théorème</u> [Banach – Steinhaus]

~~Soit $(T_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathcal{B}(X, Y)$; X Banach $(Y, \|\cdot\|)$ EVN~~

$(T_\alpha)_{\alpha \in I}$ famille d'opérateurs $X \longrightarrow Y$ (X Banach
continues $\in \mathcal{B}(X,Y)$ $Y, \|\cdot\|$ EVN)

tels que $\forall x \in X : \exists C_x > 0 . \forall \alpha \in I \ \|T_\alpha x\| \leq C_x$

alors $\exists C > 0 : \forall \alpha \in I \ \|T_\alpha\| \leq C$.

<u>Preuve</u>: On pose $f_\alpha(x) := \|T_\alpha x\|$

$\forall n \in \mathbb{N}^* : F_n := \{ x \in X : \forall \alpha \in I \ f_\alpha(x) \leq n \}$

~~$\mathring{F_n}$~~ ; F_n est fermé, et

$X = \bigcup_{n \geq 1} F_n$, $\mathring{X} \neq \emptyset$

par la contraposée du lemme de Baire

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \mathring{F_{n_0}} \neq \emptyset$.

ie $\exists \ \overline{B} = B(x_0, r) \subset F_{n_0}$ une boule fermé.

$\forall \alpha \in I : \forall x \in \overline{B} : f_\alpha(x) \leq n_0$

Soit $\|y\| \leq 1$, $x = x_0 + r y \in \overline{B}$

$\|T_\alpha y\| = \|T_\alpha \frac{x - x_0}{r}\| \leq \frac{1}{r} \|T_\alpha x\| + \frac{1}{r} \|T_\alpha x_0\|$

$\leq \frac{2 n_0}{r}$. $\blacksquare$

<u>Application</u>: Il existe une fonction continue, tels que sa série de Fourier ne converge pas en 0.

On introduit:

$S_n \ (\mathcal{C}^0([-\pi, \pi]) ; \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$f \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)$

$S_n(f)(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t)\, dt$; $D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}$

$$|S_n(f)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt \cdot \|f\|_\infty.$$

atteinte pour $f = 1$.

$$\Longrightarrow \|S_n\| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt.$$

<u>Assertion:</u> $\|S_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

<u>Supposons par l'absurde</u> $\forall f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$

$S_n(f)$ est convergente en 0

$\Longrightarrow$ bornée

$\Longrightarrow \exists C_f > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |S_n(f)| \leq C_f$

On applique le théorème de Banach Steinhaus

$\exists C > 0 . \forall n \in \mathbb{N} : \|S_n\| \leq C$ $\quad \xi$

Un Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème:

On considère l'espace $\mathbb{R}^m$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue et globalement lipschitzienne en la seconde variable au sens suivant: pour tout intervalle compact $K \subset I$, $\exists k > 0$ tel que: $\forall t \in K$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$,

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$$

Alors, si $t_0 \in I$ et $x \in \mathbb{R}^m$ sont donnés, le problème de Cauchy (P)

$$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = x \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

Etape 1 Supposons dans un premier temps que I est compact.

1. Ramenons le problème à un problème de point fixe.
   Dire que y est solution de (P) sur I signifie que $t \mapsto y(t)$ est une fonction dérivable sur I (donc continue) et que

   $$y'(t) = f(t(y(t)) \text{ pour } t \in I, \text{ et } y(t_0) = x$$

   Comme f est continue, on en déduit que y' est continue donc en intégrant on obtient:

   $$y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s.$$

   Réciproquement si y est continue sur I et vérifie l'égalité précédente alors elle est dérivable et c'est une solution de (P).
   Ainsi le problème (P) équivaut à la recherche d'un point fixe de l'application suivante:

   $$\begin{array}{rccl} F & : & C(I, \mathbb{R}^m) & \longrightarrow & C(I, \mathbb{R}^m) \\ & & y & \longmapsto & (F(y) : t \mapsto x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s) \end{array}$$

2. Montrons que F possède un unique point fixe.

   - Soient $\|y\|_\infty = \max_{t \in I} \|y(t)\|$, k la constante de Lipschitz associée à l'intervalle compact I, l la longueur de I et munissons $C(I, \mathbb{R}^m)$ de la norme

     $$\|y\|_k := \max_{t \in I} \left(\mathrm{e}^{-k|t-t_0|} \|y(t)\| \right)$$

     On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une norme sur $C(I, \mathbb{R}^m)$. De plus, $\forall y \in C(I, \mathbb{R}^m)$ on a:

     $$\mathrm{e}^{-kl} \|y\|_\infty \leq \|y\|_k \leq \|y\|_\infty$$

     Ainsi, $\|.\|_k$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes donc $(C(I, \mathbb{R}^m), \|.\|_k)$ est complet (car $(C(I, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\infty)$ l'est).
   - Comme f est continue, $C(I, \mathbb{R}^m)$ est stable par F.
   - Enfin, pour tout $y, z \in C(I, \mathbb{R}^m)$, $t \in I$ et $t \geq t_0$ on a

     $$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, z(s)))\mathrm{d}s$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| &\leq \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \|f(s,y(s)) - f(s,z(s))\| \,\mathrm{d}s \\ &\leq \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k \|y(s) - z(s)\| \,\mathrm{d}s \\ &\leq \mathrm{e}^{-k(t-t_0)} \|.\|_k (y-z) \int_{t_0}^{t} k\mathrm{e}^{k(s-t_0)} \mathrm{d}s \\ &\leq \left(1 - \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\right) \|y - z\|_k. \end{aligned}$$

De même, pour $t \leq t_0$ on a :

$$\mathrm{e}^{k(t-t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq \left(1 - \mathrm{e}^{k(t-t_0)}\right) \|y - z\|_k$$

Ainsi, pour tout $t \in I$ on a:

$$\mathrm{e}^{-k|t-t_0|} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq \left(1 - \mathrm{e}^{-k|t-t_0|}\right) \|y - z\|_k$$

En passant au max sur I on obtient finalement:

$$\|F(y) - F(z)\|_k \leq \underbrace{(1 - \mathrm{e}^{-kl})}_{<1} \|y - z\|_k.$$

F est donc contractante sur $C(I, \mathbb{R}^m)$ muni de la norme $\|.\|_k$ de sorte que, par le théorème du point fixe, (P) admet une solution **unique**.

Etape 2 Extension du résultat à un intervalle I quelconque.

Tout intervalle quelconque I peut s'écrire comme une réunion croissante d'intervalles compacts contenant t_0: $\bigcup_j I_j$ tels que $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_j \subset \cdots$.

Soit pour tout j la solution y_j de (P) sur I_j compact.

$$y_j' = f(t, y_j), \quad t \in I_j, \quad y_j(t_0) = x$$

Si y est une solution de (P) sur I :

$$y' = f(t, y), \quad t \in I, \quad y(t_0) = x$$

La restriction de y à I_j coïncide nécessairement avec y_j par unicité sur I_j.
Inversement, les fonctions y_j se raccordent : la fonction $y(t) = y_j(t)$ pour tout j tel que $t \in I_j$ est bien définie et donne une solution sur I. Ainsi le problème (P) admet une solution unique sur I, définie sur tout I.

<u>Référence :</u> ROUVIÈRE (3ÈME ÉDITION) EXERCICE 60 P.180 - 183