205 — Espaces complets : Exemples et applications

Cadre : (X,d) espace métrique

I Définitions et résultats préliminaires

Définition ① : (Suite de Cauchy) Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si : $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall l\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq n_0$, $d(x_{n+l},x_n)<\varepsilon$

Définition ② : On dit que (X,d) est complet si toute suite de Cauchy dans (X,d) converge

Caractérisation : (Théorème de Cantor) ③

(X,d) est complet ssi pour toute suite décroissante de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non vide et dont le diamètre tend vers 0, on a : $\bigcap_{n\geq 0} F_n=\{x\}$ pour $x\in X$

Application ④ : Théorème de Bolzano-Weierstrass

Les compacts de $(\mathbb{R},|\cdot|)$ sont les fermés bornés

Contre-exc ⑤ : - $[0,1]\setminus\{\frac{1}{2}\}$ n'est pas complet [fig 1]

- $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ n'est pas complet : la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$ est divergente
- $\mathcal{D}(\mathbb{R})=\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ n'est complet pour aucune des normes $\|\cdot\|_p$, $1\leq p<+\infty$

Exemple ⑥ : $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ et $(\mathbb{C}^n,\|\cdot\|)$ sont complet pour toute norme $\|\cdot\|$.

Proposition ⑦ : Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique et (F,d) un espace complet

L'ensemble $B(E,F)$ des fonctions bornées de E dans F est complet pour $d(f,g)=\sup_{x\in E}(f(x),g(x))$

Prop ⑧ : Les fermés d'un complet sont complets

Ex ⑨ : $(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),d_\infty)$ est complet

$(\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),d_\infty)$ est complet

Autre exc ⑩ : L'espace $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ muni de la distance $d(X,Y)=\mathbb{E}(\min(|X-Y|),1)$ est complet

Théorème ⑪ : (Prolongement des applications uniformément continues)

Soit (E,d) un espace métrique et $A\subset E$ une partie dense

(F,d') un espace métrique complet

$f:A\to F$ uniformément continue

Alors il existe un unique prolongement uniformément continu de f à E

Application ⑫ : La transformée de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ par : $\mathcal{F}(f)(\xi)=\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}f(x)\,dx$ se prolonge en une isométrie à $L^2(\mathbb{R})$

Théorème ⑬ : (Complété)

Soit (X,d) un espace métrique. Il existe un unique espace $(\hat{X},\hat{d})$ tq

- $(\hat{X},\hat{d})$ complet
- $(\hat{X},\hat{d})$ contient (X,d) et $\hat{d}_{|X\times X}=d$
- X dense dans $\hat{X}$

$(\hat{X},\hat{d})$ est appelé complété de (X,d). Il est unique à isométrie près

Ex ⑭ : - On peut définir $\mathbb{R}$ comme le complété de $\mathbb{Q}$

- $L^p(\mathbb{R})$ est un complété de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_p$
- $\mathbb{C}$ est le complété de $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ pour $|\cdot|$

Théorème du Point fixe (15) Soit (E,d) e.m. complet. $f : E \to E$. Si f est contractante de rapport $0 < k < 1$ alors :

- $\exists !\, a \in E$; $f(a) = a$:
- $\forall x_0 \in E$, la suite $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et : $\forall n \geq 0$: $d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x)$

Application : (16) Théorème de Cauchy-Lipschitz Global

Soit E un evn complet (cf Banach)

$I \subset \mathbb{R}$ intervalle, ouvert $\neq \emptyset$

$f : I \times E \to E$ et $(t_0, x_0) \in I \times E$

on considère le problème de Cauchy en (t_0, x_0) :

$$(*) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

- Si f est lipschitzienne par rapport à la 2° variable (x) alors, il existe une solution globale au problème de Cauchy. De plus : il y a unicité en (t_0, x_0).

corollaire : point fixe bis : (17)

Si $f : E \to E$ (E,d) complet et que : $\exists p \in \mathbb{N}$; f^p soit contractante alors : f possède aussi un unique point fixe x et, pour $x_0 \in E$, $(f^n(x_0))_n$ converge vers x

Application (18) : Théorème de Cauchy-Lipschitz local

I/ Espace de Banach :

Cadre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition : (19) $(E, |\cdot|)$ un $\mathbb{K}$-evn est dit de Banach si il est complet.

(20) $(E, +, \cdot, \times)$, $\|\cdot\|$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de Banach si c'est une $\mathbb{K}$-algèbre normée et que l'EV sous-jacent est complet.

1° exemple : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. toute norme.

ex (21) • $(M_n(\mathbb{K}), |\cdot|)$ $\mathbb{K}$-algèbre de Banach pour $|\cdot| : A \mapsto \sum |a_{ij}|^2$

• $C^1([a;b], \mathbb{R})$, $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

• **Théorème de Riesz - Fischer** (22)

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré

$\forall p \in [1 ; +\infty]$: $L^p((X, \mathcal{A}, \mu), \mathbb{K})$ Banach

• Autres exemples de Banach / Algèbre de Banach :

proposition (23) : Soit E evn, F Banach

• $\mathcal{L}(E,F)$, $\|\cdot\|_{sub}$ est un Banach.

corollaire : (24)

1) E Banach $\Rightarrow$ $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \times)$ Algèbre de Banach

2) $\forall E$ evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: E' Banach.

Théorème (25) : dans $(E, |.|)$ les séries ACV sont convergentes.

Applications : . Séries numériques dans $\mathbb{R}$.

. séries de fonctions : convergence normale.

Autre application : **Théorème (26) Application inv** :

Soit $(E, +, \cdot, \times)$ une Algèbre de Banach.

1) $E^\times := \{a \in E \,;\, \exists u \in E \,;\, au = ua\}$ est un ouvert de E.

2) Inv : $E^\times \to E^\times$, $u \mapsto u^{-1}$ est différentiable sur $E^\times$

$\forall u \in E^\times$ $\forall h \in E$: $d_u \, \mathrm{inv}(h) = -u^{-1} h u^{-1}$

Application de la théorie de Baire au Banach

Théorème (27) Soit (X, d) un espace complet.

si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide alors $F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

Application : **théorème de Banach-Steinhauss (28)**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un Banach, F evN.

et $(T_i)_{i \in I} \in \mathcal{L}_c(E, F)^I$ famille.

si : $\forall x \in E$: $\sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < \infty$ alors $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \infty$

Application aux série de Fourier (29) :

$\exists f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π périodique tq la serie de Fourier ne converge pas en 0.

III) Espace préHilbertiens et de Hilbert.

Définition (30) : Un espace prehilbertien $E, (\cdot|\cdot)$ est dit de Hilbert si il est complet pour la norme induite par le pdt scalaire.

ex : $\mathbb{R}^2$, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $\mathbb{C}^d$, $L^2(\mathbb{T})$.

proposition (31) : $H^1_0(0;1)$, $\|\cdot\|_{H^1}$ est un Hilbert.

. **Théorème de projection sur un convexe complet (32)**

Soit $E, (\cdot|\cdot)$ espace préhilbertien.

si $A \subset E$ partie convexe complète de E

Alors : $\forall x \in E$, $\exists! \, p_A(x) \in A$; $\|x - p_A(x)\| = \inf_{a \in A} \|x - a\|$

propriété : $p_A : E \to A$, $x \mapsto p_A(x)$ est 1-lipschitzienne

Caractérisation (33) :

$\forall (x,y) \in E^2$: $y = p_A(x) \iff y \in A$ et $\forall z \in A$: $\mathrm{Re}\,(y - x, y - z) \leq 0$ + [Fig 2].

corollaire : si F sev complet (34)

$y = p_F(x) \iff y \in F$ et $x - y \in F^\perp$

Application : **Def/prop (35)** Soit $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ esp probabilisé $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sous tribu : $\forall X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, p)$,

$\exists! \, E(X|\mathcal{G}) \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, p)$; $\forall G \in \mathcal{G}$: $E(X 1_G) = E(E(X|\mathcal{G}) 1_G)$

Annexe :

Figure 1 :

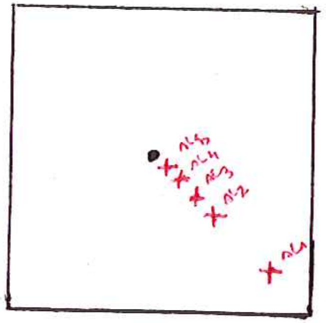
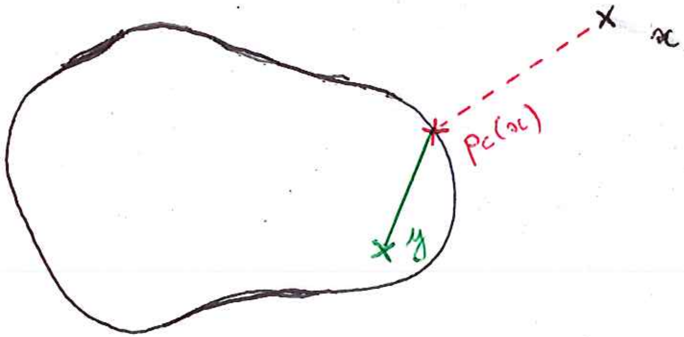


Figure 2 :



Références :

[1] : *Topologie*, de Gilles Christol, Anne Cot, Charles-Michel Marle

[2] : *Analyse fonctionnelle*, Haïm Brézis

[3] : *Maths en tête. Analyse*, Gourdon