205

Espaces complets. Exemples et applications

Dans tout ce qui suit, les espaces sont supposés dotés d'une métrique.

I - Espaces complets dans le cadre général

1. Suites de Cauchy

Def 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n,m \geq N, d(u_n,u_m) < \varepsilon$

Ex 2 : Une suite convergente est de Cauchy

Prop 3 : Toute suite de Cauchy est bornée et converge ssi elle admet une valeur d'adhérence. Ses sous-suites et son image par une fonction uniformément continue sont de Cauchy.

C-Ex 4 : $n \mapsto \ln(n)$ n'est pas de Cauchy.

2. Espaces complets, une propriété métrique

Def 5 : Un espace métrique est dit complet si toute ses suites de Cauchy convergent.

Ex 6 : $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet, $(\mathbb{Q}, |.|)$ ne l'est pas.

Rq 7 : Un espace est complet pour une métrique donnée
$(\mathbb{R}, d : (x,y) \mapsto |\arctan(x) - \arctan(y)|)$ n'est pas complet.

Prop 8 :
- Si d et d' sont deux distances équivalentes sur E alors (E,d) complet ssi (E,d') complet.
- Tout compact est complet.
- $F \subseteq E$ est complet ssi F est fermé dans E
- Si $f : E \to F$ uniformément continue, homéo alors E complet $\Rightarrow$ F complet.
- Si $(E_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complet alors $(\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n, d)$ où $d : (x_n),(y_n) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$ est complet

Th 9 : Caractérisation par les suites de fermés décroissants
(E,d) est complet
$\Leftrightarrow \forall (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fermés tq $F_{n+1} \subseteq F_n$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow \forall (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fermés non-vides, $F_{n+1} \subseteq F_n$,
$\operatorname{diam}(F_n) = \sup_{(x,y)\in F_n^2} d(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{z\}$.

Th 10 : Complété d'un espace métrique
Soit (E,d) un espace métrique, alors il existe un unique $(\tilde{E}, \tilde{d})$ complet tq $E \subseteq \tilde{E}$ et $\tilde{d}_{|E} = d$ à isométrie près.

Ex 11 : $(\mathbb{R}, |.|)$ est le complété de $(\mathbb{Q}, |.|)$.

3. Théorèmes fondamentaux

Th 12 : Théorème de Baire
Soit E un espace complet alors :
- $\forall (O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ouverts denses, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense
- $\forall (F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fermé $\mathring{F}_n = \emptyset$, $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}} = \emptyset$.

App 13 :
- Un EVN à base dénombrable n'est pas complet.
- Si $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue tq $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(nx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- $\mathbb{R}[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Th 14 : Théorème d'Ascoli
Soit K compact, E espace métrique, alors $A \subseteq \mathcal{C}(K,E)$ est relativement compacte (ie incluse dans un compact)
ssi
- A est équicontinue :
$\forall x \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x), \forall y \in V, \forall f \in A, d(f(x), f(y)) < \varepsilon$
- $\forall x \in K, \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact

App 15 : • L'espace des fonctions L-lipschitziennes est relativement compact dans $\mathcal{C}(K,E)$ où K est compact.

• De même pour les fonctions α-höldériennes $(\exists L \geq 0, \forall (x,y) \in K^2, d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x,y)^\alpha)$

App 16 : Théorème de Cauchy-Peano
Soit K un cylindre compact :
$$K = [t_0 - a ; t_0 + a] \times \bar{B}(x_0, r) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$
soit $f : K \to \mathbb{R}$ continue, M un majorant de f sur K et $c = \min(a, r/M)$, alors il existe une solution $u : [t_0 - c ; t_0 + c] \to \bar{B}(x_0, r)$ au problème de Cauchy : $\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$

Rq 17 : Il n'y a pas, en général, unicité : $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$.

II - Applications aux espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, les espaces considérés sont des EVN.

1. Espaces de Banach

Def 17 : Un EVN complet est appelé espace de Banach.

Prop 18 : E est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente converge.

Ex 19 : $(\mathbb{C}^n, \|.\|_2)$, $(\mathcal{C}(K, \ ), \|.\|_\infty)$ sont des Banachs.

C-Ex 20 : $(\mathbb{R}[X], \|.\|_{L^1,[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]})$ n'est pas complet : considérer la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} X^n$.

Prop 21 : Si $E = F \oplus G$, alors E est un Banach ssi F et G sont des Banachs et les projections p_F et p_G sont continues.

2. Théorèmes liés au caractère complet

Th 22 : Banach-Steinhaus
Soit E Banach, F EVN, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ tq $\forall x \in E$, $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\|_F < +\infty$ alors $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$.

App 23 : Il existe une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0.

App 24 : Si F est un SEV fermé de $(\mathcal{C}([0;1]), \|.\|_\infty)$ ne contenant que des fonctions continûment dérivables, alors F est de dimension finie.

Th 25 : Soit E, F Banachs, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective alors T est une application ouverte.

Cor 26 : Théorème d'isomorphisme de Banach
Soit E, F Banachs, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective, alors T est un homéomorphisme.

App 27 : Dans un espace de Banach, si deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ vérifient $\exists C > 0$, $\|.\| \leq C\|.\|'$, alors elles sont équivalentes.

Cor 28 : Théorème du graphe fermé
Pour $T : E \to F$ linéaire, on pose $\Gamma = \{(x, T(x)), x \in E\}$, Γ est un SEV de $E \times F$, Γ est le graphe de T.
Si E et F sont Banach, alors T est continue ssi Γ est un espace de Banach.

3. Espaces de Hilbert

Def 29 : Un espace vectoriel préhilbertien complet est appelé espace de Hilbert.

Ex 30 : $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum u_n^2 < +\infty\}$ est Hilbert.

Dans la suite on notera l'espace de Hilbert H, $(.,.)$ son produit scalaire et $\|.\|$ sa norme associée.

Prop 31 : Projection sur un convexe fermé
Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide,
alors $\forall x \in H, \exists! p(x) \in C$, $\inf_{y \in C} \|x-y\| = \|x - p(x)\|$.
De plus, $p : H \to C$ est 1-lipschitzienne
et on a la caractérisation dite "de l'angle obtus".

(*)
App 32 : Définition et caractérisation de l'espérance conditionnelle pour des variables aléatoire de carré intégrable.

Th 33 : Théorème de représentation de Riesz
Il y a une bijection $H \to H^*$
$x \mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle)$

App 34 : Existence de l'opérateur adjoint.

III - Un exemple concret : Les espaces L^p

1. Complétude et dualité

Def 35 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré,
- Pour $1 \leq p < +\infty$, on pose
$L^p(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurable}, \int |f|^p < +\infty \}$
- $L^\infty(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mesurable}, \exists C > 0, |f| < C \text{ p.p.} \}$

Prop 36 : Théorème de Riesz-Fisher
$(L^p, \|.\|_p)$ est complet.

App 37 : Espace de Bergmann sur le disque unité $\mathbb{D}$
$B = \mathcal{O}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D})$ (holomorphe et L^2)
B est un SEV fermé de $(L^2(\mathbb{D}), \|.\|_2)$,
en particulier c'est un espace de Hilbert.

C-Ex 38 : On a $\mathcal{C}([0;1]) \subseteq L^p([0;1])$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$
mais $\mathcal{C}([0;1])$ n'est fermé que dans L^∞.

Prop 39 : Pour $1 \leq p < \infty$, on a $L^p(\mathbb{R})' = L^q(\mathbb{R})$
où $q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

App 40 : Théorème de Rademacher
Une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ est presque partout dérivable.

C-Ex 41 : On a aussi $L^1(\mathbb{R})' = L^\infty(\mathbb{R})$ mais la réciproque est fausse.

2. Espaces de Sobolev

Def 42 : Pour $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de Sobolev par
$W^{1,p}(0,1) = \{ f \in L^p(0,1),\ f' \in L^p(0,1) \}$
où f' désigne la dérivée de f au sens des distributions : $L^p(0;1) \subseteq L^1_{loc}(0,1) \subseteq \mathcal{D}'(0,1)$.

Prop 43 : $W^{1,p}(0,1)$ muni de la norme $\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p$
est un espace de Banach.

Rq 44 : On note $H^1(0;1) = W^{1,2}(0,1)$, c'est un Hilbert
de produit scalaire $\langle u, v \rangle = \int uv + u'v'$.

Def 45 : On définit l'espace de Sobolev homogène
$H^1_0(0,1) = \overline{\mathcal{C}^\infty_c(0,1)}^{\|.\|_{H^1}}$

Rq 46 : $H^1_0(0,1)$ est un SEV fermé de $H^1(0,1)$,
c'est donc aussi un espace de Hilbert.

Prop 47 : Inégalité de Poincaré
$\exists C > 0, \forall u \in H^1_0(0,1), \int |u'|^2 \geq C \int |u|^2$.

App 48 : Formulation variationnelle de l'équation de Poisson $\Delta u = f$.

Prop 49 : L'injection de $H^1(0,1)$ dans $L^2(0,1)$ est compacte.

App 31,5 : Soit H un Hilbert séparable, $J : H \to \mathbb{R}$ continue
(*) convexe et coercive ($\lim_{\|x\| \to +\infty} J(x) = +\infty$),
alors J admet un minimum : $\exists x_0 \in H, J(x_0) = \inf_H J$.

② ①