205 — Espaces complets - Exemples et applications.

I - Espaces métriques.

Dans cette partie, on travaille avec (E,d) un espace métrique.

Déf. 1 : Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On dit que $(x_n)_n$ est une suite de CAUCHY dans E, si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tq : $\forall p,q \geq N$, $d(x_p,x_q) \leq \varepsilon$.

Prop. 2 : . Une suite convergente est de CAUCHY.

. Une suite de CAUCHY est bornée.

. Une suite de CAUCHY qui a une valeur d'adhérence converge.

. Si $(x_n)_n$ est de CAUCHY, et f une application uniformément continue, alors $(f(x_n))_n$ est de CAUCHY.

Contre-ex. 3 : Si f est seulement continue : sur $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, $f(x) = \tan(x)$, on a $(x_n)_n$ de CAUCHY mais $(f(x_n))_n$ n'est pas de CAUCHY.

Prop. 4 : Soit $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ une suite convergente de réels > 0. Alors :

. si $\forall k \geq 1$, $d(x_{k+1},x_k) \leq \varepsilon_k$, alors $(x_n)_n$ est de CAUCHY.

. si $(x_n)_n$ est de CAUCHY, alors il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que : $\forall k \geq 1$, $d(x_{\varphi(k+1)}, x_{\varphi(k)}) \leq \varepsilon_k$.

Appl. 5 : Toute série absolument convergente est convergente.

Déf. 6 : On dit que l'espace (E,d) est complet si toutes ses suites de CAUCHY convergent dans E.

Ex. 7 : . $(\mathbb{R},|\cdot|)$ est complet, $(\mathbb{Q},|\cdot|)$ n'est pas complet.

. $(]0,1],|\cdot|)$ n'est pas complet, mais $(]0,1],\delta)$ l'est, où $\delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

Prop. 8 : . Dans un métrique, un complet est fermé.

. Dans un complet, un fermé est complet.

Appl. 9 : Tout sous-espace vectoriel de dimension finie est complet.

Prop. 10 : . Une intersection quelconque de complets est complète.

. Une union finie de complets est complète.

. Un produit fini ou dénombrable de complets est complet.

Contre-ex. 11 : L'union des $[\frac{1}{n},1]$ n'est pas complète.

Prop. 12 : Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides de E, tq : $\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{diam}(F_n)) = 0$. Alors, $\exists x \in E$, tq : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

Thm. 13 : (point fixe de BANACH).

Soit $f : E \to E$, où E est complet, telle que : $\exists k \in]0,1[$, tq : $\forall x,y \in E$, $d(f(x),f(y)) \leq k\, d(x,y)$. Alors, f admet un unique point fixe $a \in E$, et : pour tout $x_0 \in E$, la suite définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a, avec l'estimation : $d(a,x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1,x_0)$.

Appl. 14 : Théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, théorème d'inversion locale.

Thm. 15 : (prolongement des applications uniformément continues).

Soit X,Y métriques, avec Y complet. Soit A dense dans X.

Soit $f : A \to Y$, uniformément continue. Alors, il existe une unique $\tilde{f} : X \to Y$, uniformément continue, tq : $\tilde{f}_{|A} = f$.

Appl. 16 : Construction de l'intégrale de RIEMANN pour les fonctions réglées.

Thm. 17 : Si (E,d) est métrique, il existe $(\hat{E},\delta)$ complet, tq : E est plongé dans $(\hat{E},\delta)$, δ prolonge d, $(\hat{E},\delta)$ unique à isométrie bij. près.

Ex. 18 : Le complété de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.

Déf. 19 : . Un espace (E,d) est compact s'il vérifie la propriété de BOREL-LEBESGUE : de tout recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ ouvert de E, on peut extraire un sous-recouvrement $(O_i)_{i\in J}$ où J est fini.

. Un espace (E,d) est précompact si $\forall \varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules de rayon ε.

Ex. 20 : $([0,1] \cap \mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas compact, mais vérifie la propriété de précompacité.

__Prop. 21 :__ . Un compact est complet.

. Un espace est compact si et seulement si il est précompact et complet.

__Thm. 22 :__ (BING).

L'espace (E,d) est compact si et seulement si pour toute distance d' équivalente à d, (E,d') est complet.

II - Espaces vectoriels normés.

Dans cette partie, on travaille avec $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

__Déf. 23 :__ On dit que $(E,\|\cdot\|)$ est un espace de BANACH si l'espace métrique associé est complet.

__Ex. 24 :__ $\mathbb{R}^n$ est un espace de BANACH.

__Prop. 25 :__ Soit X, Y des métriques, avec Y complet. Alors l'ensemble des fonctions bornées de X dans Y, muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un BANACH.
En particulier, $\mathcal{C}^0_b(X,Y)$ est un BANACH.

__Prop. 26 :__ Pour $p \in [1,+\infty]$, l'ensemble $\ell^p(\mathbb{N},\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un espace de BANACH.

__Prop. 27 :__ Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$, k fois différentiables et dont les dérivées à l'ordre k sont continues, est un espace de BANACH.

__Prop. 28 :__ Si F est un BANACH, alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un BANACH.
En particulier, l'ensemble des formes linéaires continues sur E est un BANACH.

__Contre-ex. 29 :__ $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ sur $[0,1]$ n'est pas complet.

__Prop. 30 :__ . E est un BANACH si et seulement si toute série absolument convergente de E converge dans E.

. Un evn est complet ssi toute série de CAUCHY converge.

__Thm. 31 :__ (RIESZ-FISCHER) : $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un BANACH, pour $1 \leq p \leq \infty$.

__Thm. 32 :__ (BAIRE).

Soit (E,d) un complet. Si $(O_n)_n$ est une suite d'ouverts denses dans E, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est encore dense dans E. Si $(F_n)_n$ est une suite de fermés d'intérieur vide de E, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans E.

__Appl. 33 :__ . Un evn admettant une base (algébrique) dénombrable (non finie) n'est pas complet.

. Les fonctions continues et nulle part dérivables sont denses dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

__Thm. 34 :__ (BANACH-STEINHAUS).

Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ un BANACH, $(F,\|\cdot\|_F)$ un evn, $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Si, pour tout $x \in E$, $\sup\{\|T_i x\|_F, i \in I\} < +\infty$ alors : $\sup\{\|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}, i\in I\} < +\infty$.

__Prop. 35 :__ Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ un BANACH, $(F,\|\cdot\|_F)$ un evn, $(T_n)_n$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. Si $(T_n)_n$ converge simplement vers T sur E, alors : $\sup\{\|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}, n\in\mathbb{N}\} < +\infty$, $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$, et $\|T\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} \leq \liminf_{n\to+\infty} (\|T_n\|_{\mathcal{L}_c(E,F)})$.

__Appl. 36 :__ Il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π-périodique, dont la série de FOURIER ne converge pas en 0.

__Thm. 37 :__ (application ouverte).

Soit $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ des espaces de BANACH. Soit T une application linéaire continue surjective de E dans F. Alors, il existe $c>0$ tel que $B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$.

__Appl. 38 :__ (Thm d'isomorphisme de BANACH) : si T est une ALC bijective de E dans F, alors T^{-1} est continue de F dans E.

__Appl. 39 :__ L'application linéaire continue $\mathcal{F} : (L^1(0,2\pi), \|\cdot\|_1) \to (c_0(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, $f \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est injective, non surjective.

Thm. 40 : (graphe fermé).

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des BANACH. Soit T une application linéaire de E dans F. Alors T est continue ssi son graphe est fermé dans $E \times F$.

Appl. 41 : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn. Soit $F \subset E$ un sev de E, muni de $\|\cdot\|_F$. On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet et que l'injection canonique de $(F, \|\cdot\|_F)$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$ est continue. Alors, si $T : E \to E$ est une application linéaire continue telle que $T(F) \subset F$, $T : F \to F$ est également continue.

III - Espaces de HILBERT.

Dans cette partie, on travaille avec $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un préhilbertien.

Déf. 42 : On dit que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de HILBERT si l'espace métrique associé est complet.

Ex. 43 : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, $L^2(0,1)$ sont des HILBERT.

Contre-ex. 44 : $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire de $L^2(0,1)$ n'est pas fermé, donc n'est pas un HILBERT.

Thm. 45 : (projection sur un convexe fermé).

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un HILBERT, $C \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors :

- $\forall x \in H$, $\exists ! P_C(x) \in C$, tq : $\|x - P_C(x)\| = d(x, C)$.
- $P_C(x)$ est caractérisé par : $P_C(x) \in C$ et $\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle) \leq 0$, $\forall z \in C$.
- $P_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne.
- Si F est un sev fermé de H, alors : $\forall x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par
  $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \perp F$.

Appl. 46 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit $X \in L^2(\Omega)$ une variable aléatoire et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée $E(X|\mathcal{B})$, la projection orthogonale de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Thm. 47 : (supplémentaire orthogonal).

Soit H un HILBERT. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors :
$H = F \oplus F^\perp$.

Thm. 48 : (représentation de RIESZ).

Soit H un HILBERT. Pour toute forme linéaire continue ϕ sur H, il existe un unique $f \in H$, tq : $\phi(h) = \langle f, h \rangle$, $\forall h \in H$. De plus, on a $\|f\| = \|\phi\|_{\mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})}$.

Déf. 49 : Soit H un HILBERT. On dit qu'une forme bilinéaire a sur $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ est :

- continue, s'il existe une constante C, tq : $|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\|$, $\forall u, v \in H$.
- coercive, s'il existe une constante $\alpha > 0$, tq : $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2$, $\forall v \in H$.

Thm. 50 : (STAMPACCHIA).

Soit H un HILBERT. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive. Soit C un convexe fermé non vide de H. Si $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in C$, tq : $a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle$, $\forall v \in C$.

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par :

$u \in C$ et $\frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$.

Thm. 51 : (LAX-MILGRAM).

Soit H un HILBERT. Soit a une forme bilinéaire continue et coercive. Alors, pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$, tq :

$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle$, $\forall v \in H$.

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par :

$u \in H$ et $\frac{1}{2} a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$.

Appl. 52 : Établir l'existence et l'unicité de solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques par la méthode variationnelle.