Leçon 206 - Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.

1. Points fixe et complétude

1.1. Le théorème de Picard

[ROU] Thm 1: Soient (X,d) un espace métrique complet et $F: X \to X$ une application contractante, ie
$$\exists 0 \leq k < 1 \,/\, \forall x,y \in X,\ d(F(x),F(y)) \leq k\, d(x,y).$$
Alors, il existe un unique $a \in X$ tel que $F(a)=a$.
De plus, si $x_0 \in X$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ pour $n \geq 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, et plus précisément
$$d(x_n,a) \leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_0,x_1).$$

Contre-exemple 2: si X n'est pas complet.
$X =]0,1[$, $F(x) = \frac{x}{2}$.

Contre-exemple 3: si F n'applique pas X dans X
$X = [0,1]$, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ (figure 1)

Contre-exemple 4: si F n'est pas contractante
X espace complet quelconque, $F(x)=x$ (pas unicité).

Exemples 5: si X est une partie convexe fermée d'un espace de Banach, U un ouvert contenant X et $F: U \to E$ différentiable telle que

(i) $F(X) \subset X$

(ii) $\forall x \in X,\ \|DF(x)\| \leq k < 1$

Alors, F est contractante.

Remarque 6: le théorème reste vraie si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que f^k soit contractante.

Thm 7: (Point fixe à paramètre)
Soit (X,d) un espace métrique complet, Λ un espace métrique et $F: X \times \Lambda \to X$ continue telle que: $\exists 0 \leq k < 1,\ \forall x,y \in X, \forall \lambda \in \Lambda\ d(F(x,\lambda),F(y,\lambda)) \leq k\,d(x,y)$
Alors, il existe une application $x: \Lambda \to X$ telle que $[F(x,\lambda) = x \iff x = x(\lambda)]$.

1.2. Application aux équations différentielles

Thm 8: (Cauchy-Lipschitz) [ROU]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue telle que
$\forall K \subset I$ compact, $\exists k > 0, \forall t \in K, \forall y,z \in \mathbb{R}^m$,
$\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k\|y-z\|$.
Alors, pour tout $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^m$ donné, il existe une unique solution $t \mapsto y(t)$ définie sur I tout entier, de
$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Application 9: Il existe une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ à l'équation du pendule
$$\begin{cases} u'' = -\sin(u) \\ u(0) = a \\ u'(0) = b. \end{cases}$$

Thm 10: Si F vérifie les hypothèses du thm 9, et $y(t,x_0)$ désigne la valeur prise en t par l'unique solution définie sur I de (1) alors $(t,x_0) \mapsto y(t,x_0)$ est continue. [DEM]

Rmq 11: Ce résultat sert notamment dans la preuve du théorème de Hadamard-Lévy dans le cas C^2. [EQ]

1.3. Application en calcul différentiel

Thm 12: (inversion locale)
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, et $f: U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $Df(a)$ est inversible. Alors, f est un C^1-difféomorphisme local au voisinage de a.

Thm 13: (fonctions implicites)
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$ et $f: U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1, telle que $D_y f(a,b)$

[BRE]

est inversible. Alors, il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$, $V\times W\subset U$, et une unique application $\varphi : V\to W$ de classe C^1 telle que :

$$[(x,y)\in V\times W \text{ et } f(x,y)=0] \Leftrightarrow [x\in V \text{ et } y=\varphi(x)].$$

1.4. Application en analyse hilbertienne

Thm 14 : (Stampacchia)
Soit H un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert et $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive définie sur H, et K un convexe fermé non vide de H. Alors, pour $\varphi\in H'$, il existe $u\in K$ unique tel que $\forall v\in K$, $a(u, v-u)\geq \varphi(v-u)$.
De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$\begin{cases} u\in K \\ \frac{1}{2}a(u,u)-\varphi(u) = \min_{v\in K}\left\{\frac{1}{2}a(v,v)-\varphi(v)\right\} \end{cases}$$

2. Points fixes et compacités

2.1. En dimension 1

Thm 15 : Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a,b]\to[a,b]$ continue. Alors f admet un point fixe dans $[a,b]$.

[XENS 1]

Application 16 : Théorème de Sarkowski
Soit $f : [a,b]\to[a,b]$ continue. Si f admet un point 3-périodique, alors f admet des points n-periodique pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2.2. En dimension supérieure

Thm 17 : (Brouwer)
Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et C une partie convexe compacte non vide de $\mathbb{R}^N$, et $f : C\to C$ continue. Alors f admet au moins un point fixe.

Application 18 :
Soient $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ avec $a<b$ et $c<d$. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le rectangle $E(a,b,c,d)=[a,b]\times[c,d]$. On suppose qu'on a deux applications continues $h, v : [-1,1]\to E(a,b,c,d)$ telles que
(i) $h(-1)$ est sur le côté gauche du rectangle
(ii) $h(1)$ est sur le côté droit du rectangle
(iii) $v(-1)$ est en bas du rectangle.
(iv) $v(1)$ est en haut du rectangle.
Alors, les deux chemins h, et v, se coupent : $\exists t,s\in[-1,1]$ tel que $h(t)=v(s)$ (figure 2)

Application 19 : Thm de Jordan
Soit γ une courbe fermée simple continue dans $\mathbb{R}^2$. Alors, le complémentaire de γ dans $\mathbb{R}^2$ est formé d'exactement deux composantes connexes distinctes, dont l'une est bornée et l'autre non. Toutes deux ont pour frontière la courbe γ.

Contre-exemple 20 : en dimension infinie
$$f : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})$$
$$u \mapsto f(u) := \Big(1-\sum_{n\geq 0}|u_n|, u_0, u_1, \dots\Big)$$

2.3. En dimension infinie

Thm 21 : (Schauder) DÉVELOPPEMENT
Soit C une partie convexe fermée non vide dans E un Banach et $f : C\to C$ continue telle que $\overline{f(C)}$ compacte dans E. Alors, f admet au moins un point fixe.

<u>Application 22</u> : Théorème de Cauchy-Peano
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^N$. Alors il existe $T>0$ et $u : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 sur $[0,T]$ telle que

$$\begin{cases} u'(t) = f(u(t)), & \forall t \in [0,T] \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

[GOU] <u>Remarque 23</u> : La compacité permet aussi d'affaiblir les hypothèses sur le théorème de Picard :
<u>Thm 24</u> : Si K est un convexe compact d'un evn E et si $f : K \to K$ est 1-lipschitzienne, alors f admet au moins un point fixe.
<u>Thm 25</u> : Si (E,d) est un espace métrique compact et $f : E \to E$ vérifie $\forall (x,y) \in E^2, x \neq y$, $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$, alors f admet un unique point fixe.

2.4. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$.

<u>Thm 26</u> : DÉVELOPPEMENT
Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que : $PGP^{-1} \subset O_n(\mathbb{R})$.

3. Résolution approchée de $F(x)=0$.

[ROU] 3.1. Introduction

Pour résoudre $F(x)=0$ on cherche à transformer l'équation en un problème équivalent de point fixe, de la forme $f(x) = x$.
<u>Idée</u> : prendre $f(x) = x + \lambda(x) F(x)$ où λ ne s'annule pas.
<u>Pb</u>. Choix de $\lambda(x)$.

3.2. Classification des points fixes

<u>Thm 27</u> : Soient $F : I \to \mathbb{R}$ C^1 sur un intervalle ouvert I et $a \in I$, un point fixe de F. Alors :
(i) Si $|F'(a)| < 1$, $\exists \alpha > 0$ tq $J = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F et la suite définie par $x_0 \in J$, $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers a.
On dit que a est un point fixe <u>attractif</u>.
(ii) Si $F'(a) = 0$ et F C^2, on a de plus une convergence d'ordre 2 vers a. On dit que a est un point fixe <u>superattractif</u>.
(iii) Si $|F'(a)| > 1$ alors $\exists \alpha > 0$ tel que $J = [a-\alpha, a+\alpha]$ tel que $\forall x_0 \in J$, $x_{n+1} = F(x_n)$ sort de J. On dit que a est un point fixe <u>répulsif</u>.

3.3. L'exemple de la méthode de Newton

Pour avoir un point fixe attractif, un bon choix est de prendre $\lambda(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ si f' ne s'annule pas. En effet :
<u>Thm 28</u> : <u>Méthode de Newton</u>
Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$. Alors :
(i) il existe I intervalle fermé centré en a, l'unique zéro de f, tel que I est stable par $F(x) = -\frac{f(x)}{f'(x)} + x$, et $x_0 \in I$, $x_{n+1} = F(x_n)$ a une convergence d'ordre 2 vers a.
(ii) si de plus, $f'' > 0$, alors on peut prendre $I = [a, d]$.

Annexe :

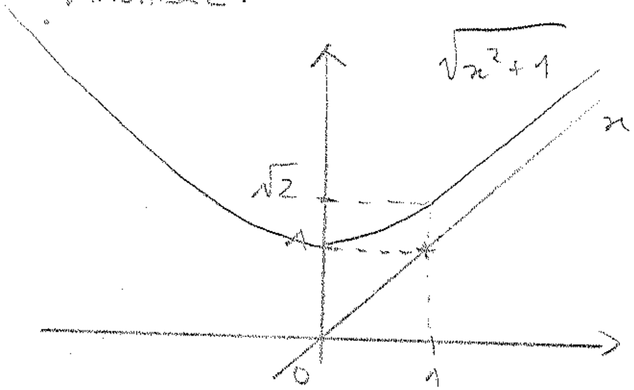


Figure 1.

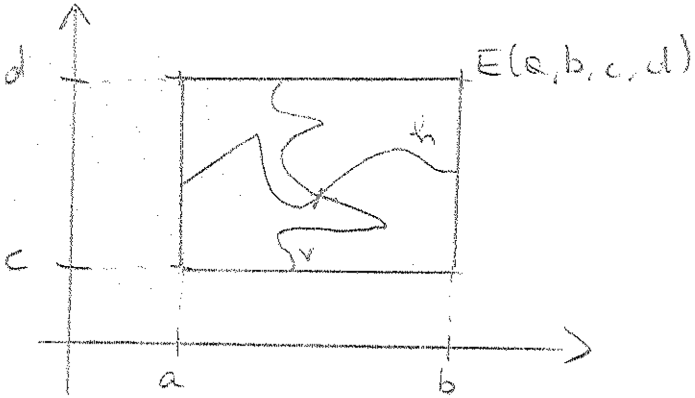
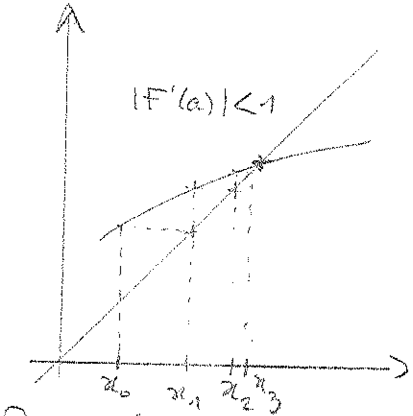
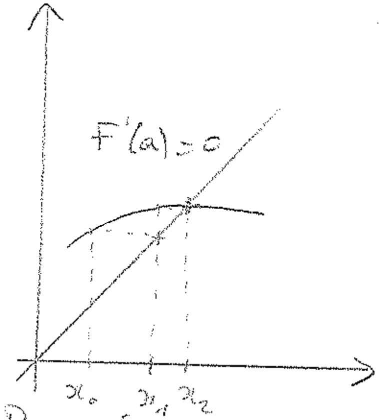


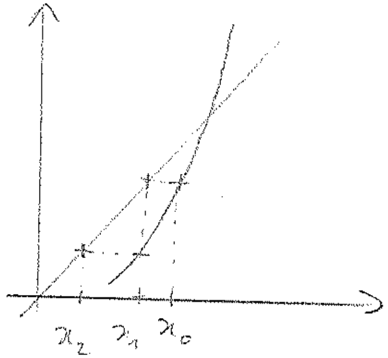
Figure 2.



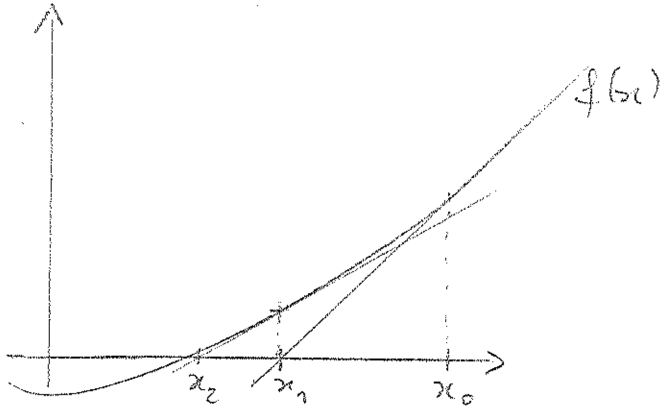
Point fixe attractif



Point fixe superattractif



Point fixe répulsif



Méthode de Newton