206

Théorèmes de point fixe. Exemple et applications.

I) Point fixe et applications contractantes

1) Généralités et théorème de Picard

Def 1 : Soit X un espace quelconque et $\varphi : A \subset X \to X$. Un point fixe de φ est un élément $a \in A$ tel que $\varphi(a) = a$.

Def 2 : Soit $a \in A$ un point fixe de φ. S'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $u \in V$, $(\varphi^n(u))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a, alors on dit que a est un point fixe attractif de φ ; sinon on dit que a est un point fixe répulsif.

Def 3 : Soit (E,d) un espace métrique. $f : E \to E$ est dite contractante si : $\exists k<1, \forall x,y \in E,\ d(f(x),f(y)) < k\, d(x,y)$.

Thm 1 : [Picard] Soit (E,d) un espace métrique complet et $\varphi : E \to E$ une application contractante alors φ admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, ce point peut s'obtenir comme limite de la suite des itérés $(\varphi^n(x_0))_{n\geq 0}$ à partir d'un point $x_0 \in E$ quelconque et $\forall n \geq 1$ $d(\varphi^n(x_0),a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0,x_1)$ où k est le rapport de contraction de φ.

Rq : Toutes les hypothèses sont importantes. Il est rare qu'un théorème de point fixe apporte autant de précisions (existence du point fixe, unicité et vitesse de convergence des itérés).

Contre-ex 1 : $X =]0,1[$ et $F(x) = \frac{x}{2}$. F contractante mais X pas complet

Contre-ex 2 : $X = [0,1]$ et $F(x) = \sqrt{x^2+1}$, X complet, F contractante mais $F(X) = [1,\sqrt{2}] \not\subseteq X$.

Contre-ex 3 : $X = [0,1]$, $F(x) = \sin x$, X complet, $F(X) \subset X$. F admet un point fixe mais il n'y a pas la bonne vitesse de convergence des itérés.

Contre-ex 4 : X complet quelconque, $F(x) = x$. F n'est pas contractante : pas d'unicité du point fixe

Prop 2 : Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in I$ un point fixe de φ :
- si $|\varphi'(a)| < 1$, a est attractif
- si $|\varphi'(a)| > 1$, a est répulsif.
- si $|\varphi'(a)| = 1$, on ne peut rien dire

2) Variantes du théorème de Picard

Thm 3 : Soient (E,d) un espace métrique compact non vide de distance d et F une application de E dans lui-même. Si pour tout $x,y \in E$, $x \neq y$, $d(F(x),F(y)) < d(x,y)$ alors F admet un unique point fixe et la suite des itérés $(F^n(x_0))_{n\geq 0}$ avec $x_0 \in E$ converge vers le point fixe.

exemple 5 : $f : [-\pi,\pi] \to [-1,1]$, $x \mapsto \sin x$: point fixe en 0.

Thm 4 : Soit X une partie convexe compacte non vide d'un espace normé et $F : X \to X$. Si pour tout $x,y \in X$, $\|F(x)-F(y)\| \leq \|x-y\|$, alors F admet au moins un point fixe dans X.

exemple 6 : $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$, $X \mapsto AX$, $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $\quad \|f(x)-f(y)\| \leq \|A\|\,\|x-y\| \leq \|x-y\|$

$\to \forall \lambda \in [0,1]$ $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ est point fixe de f.

Thm 5 : Soient X un espace métrique complet non vide et Λ un espace métrique et $F : X \times \Lambda \to X$ continue. Si F est uniformément contractante en la première variable : $\exists k \in [0,1[$ tq $\forall x,y \in X$, $\forall \lambda \in \Lambda$, $d(F(x,\lambda),F(y,\lambda)) \leq k\, d(x,y)$ alors pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'équation $F(x,\lambda) = x$ admet une unique solution $x = x(\lambda)$ qui varie continuement en λ.

exemple 7 : $F : \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x+y)+t-1 \\ \frac{1}{2}\cos(x-y)-t+\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\to$ unique solution $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

II) Applications du théorème de Picard

1) Equations différentielles

Thm 6 [Cauchy-Lipschitz] Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ localement lipschitzienne en la 2nd variable : $\forall (t_0,y_0) \in U$, $\exists\ C_0 = [t_0-T_0, t_0+T_0] \times \bar{B}(y_0,r_0) \subset U$ et $k = k(t_0,y_0) \geq 0$ tels que
$\forall (t,y_1), (t,y_2) \in C_0$, $\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq k\,\|y_1 - y_2\|$

Alors pour tout $C=[t_0-T, t_0+T]\times \bar{B}(y_0,r_0)$, le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0,y_0) admet une unique solution.
i.e. $\exists!\, y : [t_0-T, t_0+T] \to U$ solution de $y' = f(\cdot, y)$, $y(t_0)=y_0$, $(t_0,y_0)\in U$.

exemple 8: le problème $y' = 2t\,y(t)$ admet une solution unique avec condition initiales ($t_0 = 1$, $y_0 = 1$)
$\to y(t) = \exp(t^2-1)$

Thm 7 [Stampacchia] Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit K un convexe, fermé non vide. Etant donné $\varphi \in H'$, le dual de H un espace de Hilbert, il existe un unique $u \in K$ tel que $a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u\rangle$ $\forall v \in K$. De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété $\{u\in K$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u\rangle = \min_{v\in K}\left(\frac{1}{2}a(v,v) - \langle\varphi, v\rangle\right)\}$.

Exemple 9: Problème de l'obstacle.

Thm 8 [Lax-Milgram] Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors, pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que
$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle$ $\forall v \in H$. De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété $\begin{cases} u \in H \\ \frac{1}{2}a(u,u) - \langle\varphi,u\rangle = \min_{v\in H}\left(\frac{1}{2}a(v,v) - \langle\varphi,v\rangle\right)\end{cases}$

2) Résolution d'autres équations

Soit $I=[a,b]$ un intervalle compact, $K : I\times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et E l'espace des fonctions réelles continues sur I muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\varphi \in E$

Thm 9 [Fredholm] L'équation fonctionnelle
$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K(s,t)\,x(s)\,ds$, pour $t \in I$
admet une unique solution $x \in E$ si $(b-a)\max_{s,t\in I}|K(s,t)| < 1$.

idée de la preuve: appliquer le théorème de point fixe à F, $F(x)(t) = \varphi(t) + \int_a^b K(s,t)\,x(s)\,ds$

exemple 10: Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 1$ alors l'équation $x(t) = \varphi(t) + \int_a^t \lambda\, x(s)\,ds$ a une unique solution.

Thm 10 [Newton] Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$. Alors, il existe un intervalle I stable par F tel que $a \in I$ et pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n) = (F^n(x_0))_{n\geq 0}$ où $F(x) = x + \frac{f(x)}{f'(x)}$, a une convergence d'ordre 2 vers a, l'unique zéro de f.

exemple 11: Calcul d'une racine carrée d'un réel positif $a \in \mathbb{R}^+$ en considérant f la fonction polynomiale $f(x) = x^2 - a$ sur $[0,a]$

3) Calcul différentiel

Thm 11 [Inversion locale] Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage ouvert de l'origine. Si $f(0)=0$ et $Df(0)$ est inversible, alors il existe V et W, des voisinages ouverts de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, tels que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W.

Application: Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un voisinage V de $Id \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que si $A \in V$, $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$.

Thm 12 [Fonctions Implicites] Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, voisinage de l'origine et $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ $\mathcal{C}^k$ de U dans $\mathbb{R}^p$. Si $f(0,0)=0$ et $D_y f(0,0)$ est inversible alors il existe $r>0$ et $s>0$ et une unique $\varphi : B_{\mathbb{R}^n}(0,r) \to B_{\mathbb{R}^p}(0,s)$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que
$(x \in B_{\mathbb{R}^n}(0,r), y \in B_{\mathbb{R}^p}(0,s), f(x,y)=0) \iff (x \in B_{\mathbb{R}^n}(0,r), y = \varphi(x))$

exemple 12 : $F(x,y,t) = \left(x - \frac{1}{2}\sin(x+y) - t + 1,\ y - \frac{1}{2}\cos(x-y) + t - \frac{1}{2}\right)$

→ résoud $F(x,y,t) = 0$.

$(x_0, y_0, t_0) = (x(t_0), y(t_0), t_0)$ où $x(t)$ et $y(t)$ sont telles qu'à l'ex 7.

et on applique le théorème des fonctions implicites ...

Il existe $t \mapsto (x(t), y(t))$ qui coïncident avec $x(t)$ et $y(t)$ précédent

Thm 13 [point fixe et fonctions holomorphes]

Soit $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ et F une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \supset \overline{D}$. Si $|F(z)| < 1$ pour $|z| = 1$ ... alors F admet un unique point fixe $a \in D$.

idée de preuve : On raisonne sur $N(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}dz$ où $f_t(z) = z - tF(z)$, $0 \leq t \leq 1$ et γ est le cercle unité parcouru dans le sens direct. On calcul N par le théorème des résidus.

$N(t)$ est le nombre de 0 de f_t dans D, et est une fct° continue de t sur $[0,1]$ par théorème d'intégrales à paramètre et $N(0) = 1$.

d'où f_t a un unique 0 dans D pour tout $t \in [0,1]$

$t = 1$ ⇝ $z - F(z)$ a un unique 0, point fixe de F

III / Autres théorèmes de point fixe et applications

Thm 14 [Brouwer] Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne. Toute application continue de B dans B admet au moins un point fixe.

Application : Une application continue de S^{n-1} dans un espace euclidien de dimension $(n-1)$ admet deux points antipodaux ayant la même image.

Thm 15 [Schauder] Soit X une partie convexe fermée non vide d'un espace de Banach, Si $f : X \to X$ est continue telle que $F(X)$ est relativement compact alors F admet au moins un point fixe dans X.

exemple 14 : Problème de Nicoletti pour les fonctions bornées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues bornées de $[a,b] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et t_i, u_i des réels pour $i \in [\![1,n]\!]$ tq $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$ alors il existe n applications $x_1, \dots x_n \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ telles que : $\forall t \in [a,b]$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$

$x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t))$ et $x_i(t_i) = u_i$.

(On considère $T(x_1, \dots, x_n) = \left(t \mapsto u_i + \int_{t_i}^t f_i(u, x_1(u), \dots x_n(u))du\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$

↳ par Schauder T admet un point fixe)

Thm 16 [Cauchy-Arzela-Peano] Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ continue. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, le problème de Cauchy $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ admet au moins une solution locale.

Thm 17 : Soit E un ensemble non vide ordonné dans lequel toute partie non vide possède une borne inférieure et supérieure. Alors toutes fonctions croissante de E dans E possède un point fixe.

exemple 16 : Une fonction croissante de $I \to I$ admet un point fixe.

Thm [Kakutani Commutatif] Soit E un espace vectoriel normé et (T_i) une famille commutative d'applications affines continues de E dans lui-même, stabilisant un compact K convexe et non vide de E, alors il existe un point fixe commun à tous les T_i dans K.

Prop : Soit K un compact convexe non vide de E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $\forall u \in G$ $u(K) \subset K$ avec G un sous-groupe compact de $GL(E)$ alors il existe $a \in K$ tel que $\forall u \in G$ $u(a) = a$

Thm : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. $O_n(\mathbb{R})$ est en particulier un sous-groupe maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Références : ROUVIERE, Petit guide de calcul différentiel

BREZIS, Analyse fonctionnelle

DEMAILLY, Analyse numérique et équations différentielles

GONNORD-TOSEL, Calcul différentiel

ALESSANDRI, Leçons d'analyse pour l'agrégation

GONNORD-TOSEL, Topologie

Développements : • Théorème de Stampacchia

• Sous-groupe compact de $Gl_n(\mathbb{R})$