206

Théorèmes de point fixe. Exemples et Applications

I. Points fixes et complétude

1/ Théorème de Picard

ROUVIÈRE: p.147

Thm 1 (Picard) : Soient (X,d) un espace métrique complet, $F : X \to X$ une application contractante, i.e. $\exists k \in [0,1[$ tel que $\forall x,y \in X$ $d(F(x),F(y)) \leq k\, d(x,y)$.
Alors F admet un unique point fixe a. De plus a est limite de la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n)$ définie à partir de n'importe quel $x_0 \in X$ et $d(x_n,a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0,x_1)$.

Rmq 2. Le théorème apporte l'existence, l'unicité et une méthode d'approximation. En contre partie, toutes les hypothèses sont indispensables.

p.148

C.ex 3 : $X =]0,1[$, $F(x) = x/2$ contractante sans point fixe (X non complet).

C.ex 4 : $X = [0,1]$, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ contractante, X complet mais $F(X) = [1,\sqrt{2}] \not\subset X$

C.ex 5 : $X = \mathbb{R}$, $F(x) = \sqrt{x^2+1}$, X complet, $F(X) \subset X$ mais F n'est pas contractante.

p.169

Rmq 6 : Le théorème 1 reste vrai si on suppose seulement qu'une itérée de F est contractante.

p.173

Thm 7 : Soit (X,d) un espace métrique complet, Λ un espace métrique et $F : X \times \Lambda \to X$ continue. On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tq $\forall x,y \in X$ $\forall \lambda \in \Lambda$
$d(F(x,\lambda),F(y,\lambda)) \leq k\, d(x,y)$.
Alors, $\forall \lambda \in \Lambda$, $x \mapsto F(x,\lambda)$ admet un unique point fixe $x(\lambda)$ et $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

Ex 8 : Le système
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1 \\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2} \end{cases}$$
admet $\forall t \in \mathbb{R}$ une unique solution $(x(t),y(t))$, continue en t.

2/ Applications

ROUV p.179-180

Thm 9 (Cauchy-Lipschitz) : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue telle que $\forall K \subset\subset I$ $\exists k > 0$ tel que : $\forall t \in K$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^m$ $\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k \|y - z\|$
Alors, $\forall (t_0,x_0) \in I \times \mathbb{R}^m$ le système différentiel $y' = f(t,y)$ et $y(t_0) = x_0$ admet une unique solution, qui est globale.

Rmq 10 : Le système différentielle équivaut à : $y \in C^0(I,\mathbb{R}^m)$ et $y = F(y)$ où $F(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$

Ex 11 : (équation du pendule) L'équation $u'' = -\sin u$, $u(0) = a$, $u'(0) = b$ admet une unique solution, définie sur $\mathbb{R}$.

Ex 12 : Les systèmes linéaires à coefficients constant.

p.188-189

Thm 13 (Inversion locale) : Soient $U \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe C^1 et $a \in U$. On suppose $Df(a) \in GL_m(\mathbb{R})$. Alors il existe un ouvert V contenant a ($V \subseteq U$) tel que $f : V \to f(V)$ soit un C^1-difféomorphisme.

Heuristique. On cherche à résoudre $f(x) - y = 0$ en transformant l'équation en le problème de point fixe $F(x) = x$ où
$F(x) = x - Df(a)^{-1}(f(x) - y)$

O-A p.11

Appli 14 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe un voisinage V de I_n dans $M_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall A \in V$ $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$

Rou p.192

Thm 15 (Fonctions implicites) : Soient $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 et $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$.
Si $D_y f(a,b)$ est inversible alors il existe V voisinage de a dans $\mathbb{R}^m$, W un voisinage de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$ et une unique application $\varphi : V \to W$ telle que :
$(x \in V, y \in W$ et $f(x,y) = 0) \iff (x \in V$ et $y = \varphi(x))$

Ex 16 : pour $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $(a,b) = (1,0)$ on trouve : $V = [-1,1]$, $W =]0,+\infty[$ et $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$. (demi cercle supérieur)

O-A p.12

Appli 17 : L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à n racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

BRÉZIS p.136-137

Thm 18 (Stampacchia) : Soient $(H,\langle,\rangle)$ un espace de Hilbert, $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire sur H continue et coercive et K un convexe fermé non vide. Alors,
$\forall \varphi \in H'$, $\exists ! u \in K$ tel que $a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$ $\forall v \in K$.
Si de plus a est symétrique, u est caractérisé par :
$u \in K$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v\in K} \{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \}$.

Cor 13 (Lax-Milgram) : Sous les mêmes hypothèses, avec $K=H$, on a : $\forall \varphi \in H'$ $\exists ! u \in H$ tel que $a(u,v) = \varphi(v)$ $\forall v \in H$.
Si de plus a est symétrique, u est caractérisé par :
$u \in H$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v\in H} \{ \frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v) \}$.

II Points fixes et compacité : (X,d) espace métrique compact :

Thm 20 Soit $f : X \to X$ telle que $\forall x,y \in X$, $x \neq y$
$d(f(x),f(y)) < d(x,y)$. Alors f admet un unique point fixe, limite de la suite $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_0 \in X$, $\forall x_0 \in X$.

Ex 21. $f : x \mapsto \sin x$, $X = [0,1]$. f admet un unique point fixe et pourtant f n'est pas contractante !

ROUV p.171

Thm 22 Soit X une partie convexe compacte d'un evn. Soit $f : X \to X$ telle que $\forall x,y \in X$, $\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|$. Alors f admet au moins un point fixe.

C-Ex 23 : $X = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x+1$. Alors f est sans point fixe. (X non compact).

C-ex 24 : $X = S^1$ et f une rotation. Alors f est sans point fixe (X non convexe).

DVP n°1

Thm 25 (Kakutani) : Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit K un convexe compact non vide de V. Soit G un sous-groupe compact de $GL(V)$ tel que :
$\forall u \in G$, $u(K) \subset K$. Alors $\exists x \in K$ tel que $\forall u \in G$ $u(x) = x$

Appli 26 : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset O(q)$.

III Autour du théorème de Brouwer :

1/ Le théorème de Brouwer

ROU p.174

Thm 27 (Brouwer en dimension 1) : Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ continue. Alors f admet un point fixe.

Ex 28 : $f : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto 1 - x^2$ admet un point fixe mais la suite $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ ne converge pas vers ce point fixe.

ROM p.

Appli 29 : un segment n'est jamais homéomorphe à un cercle

X-ENS p.86 - 92

Prop 30 : Sous les hypothèses du thm 27, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérés de f à partir de $u_0 \in [a,b]$ converge (vers un point fixe de f) si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

Prop 31 : Soit $f : I_0 \to \mathbb{R}$, I_0 segment, f continue. Si $I_0 \subset f(I_0)$ alors f admet un point fixe.

Appli 32 (Thm de Sarkowsky) : Soient I un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ continue. Si f admet un point 3-périodique, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f admet un point n-périodique.

ROU p.175

Def 33 : Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et S la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Une rétraction de B sur S est une application continue $G : B \to S$ telle que $G|_S = id_S$.

Prop 34 : Si $f : B \to B$ continue est sans point fixe alors il existe une rétraction de B sur S.

Thm 35 (Brouwer) [ADMIS]
Toute application continue de B dans B admet un point fixe (au moins).

p.176

Rmq 36 : Contrairement au théorème de Picard, qui est métrique, celui de Brouwer est topologique et ne donne ni unicité ni convergence des itérés.

p.179

Rmq 37 : Le théorème de Brouwer reste valable si on remplace B par une partie de $\mathbb{R}^n$ homéomorphe à B comme les parties convexes compactes par exemples.

QUE p.152 SER p.54 S^t R p.368-369 p.153 ROUV p.150-151

2/ Applications

Prop 38 : Soit $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ et soit $R = [a,b] \times [c,d]$. On considère deux courbes $\gamma, \delta : [-1,1] \to R$ joignant les côtés opposés de R ie $\gamma(-1) = (a,x)$, $\gamma(1) = (b,y)$, $\delta(-1) = (t,c)$ et $\delta(1) = (s,d)$ avec $x, y \in [c,d]$ et $(s,t) \in [a,b]$. Alors γ et δ se croisent.

Thm 39 (Perron-Frobenius) : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i,j$ $a_{ij} \geq 0$. Alors le rayon spectral de A, $\rho(A)$, est une valeur propre associée à un vecteur propre à coordonnées positives.

Thm 40 (Schauder) : Soit E un Banach et soit K un convexe compact de E. Alors toute application continue de K dans K possède un point fixe.

Appli 41 (Arzela-Peano) : Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ continue et $(t_0, x_0) \in U$. Il existe $\rho > 0$ et $f : [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $f(t_0) = x_0$, $(t, f(t)) \in U$ et $f'(t) = F(t, f(t))$ $\forall t \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$

V Résolution approchée de $f(x) = 0$

1/ Introduction

Heuristique : Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, on cherche à la transformer en un problème équivalent de point fixe, par exemple en posant $F(x) = x + \lambda(x) f(x)$ où λ est une fonction ne s'annulant pas. On cherche λ de sorte que les itérés $x_{n+1} = F(x_n)$ convergent vers la solution

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $a \in I$ un point fixe de F.

Prop 42 (Cas attractif) : Si $|F'(a)| < 1$, $\exists \alpha > 0$ tel que $J = [a-\alpha, a+\alpha]$ soit stable par F. De plus la suite définie par $x_0 \in J$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers a.

Ex 43 : Le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la racine positive de $x^2 = x+1$. La suite $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ converge vers φ.

Prop 43 (cas super-attractif) : Si F est C^2 sur I et que $F'(a) = 0$. Si $|F''| \leq \Pi$, alors $|F(x) - a| \leq \frac{1}{2} \Pi (x-a)^2$. La convergence des itérés est alors d'ordre deux.

Prop 44 (cas répulsif) : Si $|F'(a)| > 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x_0 \in [a-\alpha, a+\alpha] \setminus \{a\}$, la suite $x_{n+1} = F(x_n)$ sorte de $[a-\alpha, a+\alpha]$.

Rmq 45 : Dans ce cas a est un point fixe attractif pour la bijection réciproque de $F|[a-\alpha, a+\alpha]$.

Ex 46 : Si $|F'(a)| = 1$ on ne peut rien dire :

- $I = [0, \pi/2]$ et $F : x \mapsto \sin x$. La suite des itérés décroît vers 0.
- $I = [0, +\infty[$ et $F : x \mapsto \mathrm{sh}\, x$. La suite des itérés diverge.

2/ La méthode de Newton

Thm 47 (Méthode de Newton) : Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$ (f s'annule donc en un unique point de $]c,d[$, noté a.)
Pour $x_0 \in [c,d]$, on pose, tant que l'on peut, $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors :

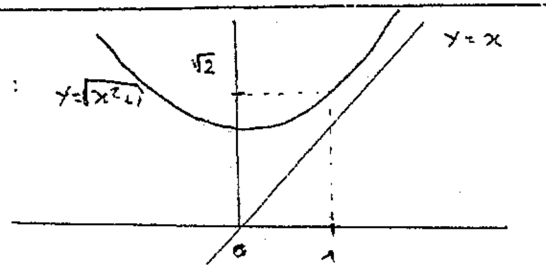
1. Il existe $C > 0$ tel que si $|x_0 - a| < 1/C$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ x_n est bien défini et $|x_n - a| \leq |x_0 - a|$. Dans ce cas $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a à vitesse quadratique
2. Si $f'' > 0$ sur $[c,d]$ et $x_0 > a$ alors $(x_n)_n$ est bien définie, $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > a$. Dans ce cas on a l'équivalent :
$$x_{n+1} - a \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)} (x_n - a)^2.$$

Ex 48 : Soit $y > 0$. On veut estimer $a = \sqrt{y}$. Soient $0 < c < d$ tels que $c^2 < y < d^2$. Pour $x_0 \in]a,d]$ soit $(x_n)_n$ la suite obtenue en itérant $F(x) = x - \frac{x^2 - y}{2x}$. On a alors
$$0 < x_n - a < 2a \left(\frac{x_0 - a}{2a}\right)^{2^n}.$$

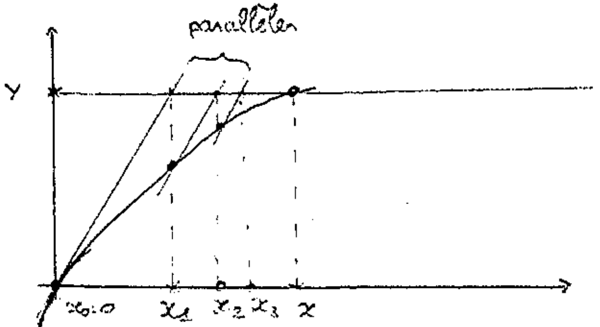
ROUV p.150-151 DEM p.36-37 DVP n°2 ROU p.156

Annexe :

C-ex 2 et 3 :



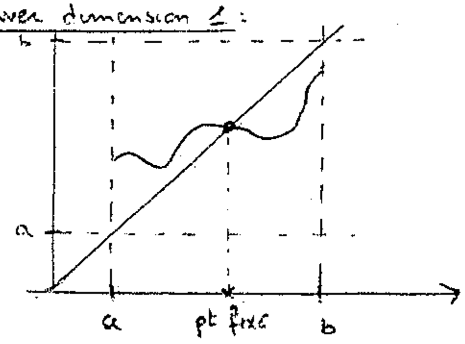
Thm 13 (Inversion locale) :



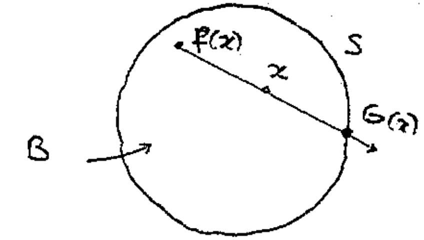
Cas $n=1$, $a=0$ et $f(0)=0$: $x=f^{-1}(y)$ est limite de la suite

$x_{n+1}=F(x_n)=x_n+Df(0)^{-1}(y-f(x_n))$.

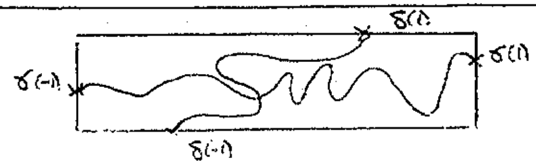
Brouwer dimension 1 :



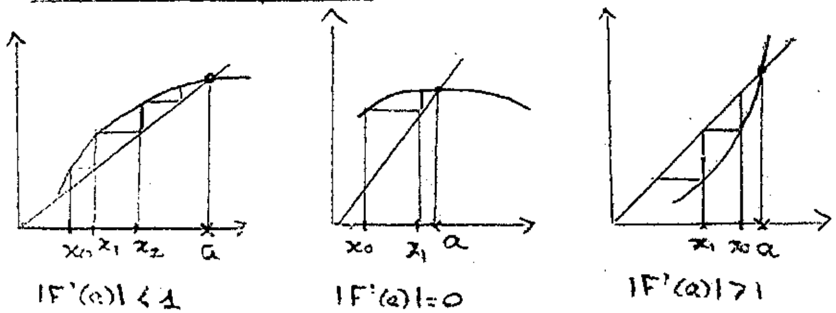
Prop 34 : Construction d'une retraction G :



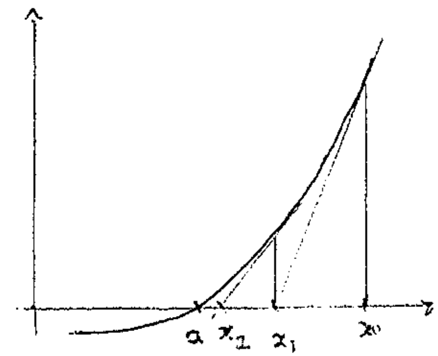
Prop 38



Classification des pts fixes



Méthode de Newton



Réf : [Rou] : Rouvière (4e édition)
[O-A] : Objectif Agrégation
[Brézis] : Brézis
[X-ENS] : Analyse 1
[QUE] : Queffélec, Topologie
[SER] : Denis Serre, Matrices
[St R] : J. St Raymond Topologie, calcul différentielle et variable complexe
[DEM] Demailly

Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

Florian LEMONNIER et Arnaud STOCKER – 13 mai 2015

[Ale], problème III.III.A.1

Théorème

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit K un convexe compact non-vide de V.
Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$ vérifiant : $\forall u \in G, u(K) \subset K$.
Alors $\exists x \in K, \forall u \in G, u(x) = x$.

Démonstration :

Étape 1 : Soit $v \in \mathcal{L}(V)$, tel que $v(K) \subset K$; on va montrer que v admet un point fixe dans K.

Soit $x_0 \in V$; on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x_k = \dfrac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} v^l(x_0)$.

Comme K est convexe : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ x_k \in K$.

Comme K est compact : il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $x \in K$.

On a :

$$v(x_k) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k} v^{l+1}(x_0) = \frac{1}{k+1}\left(\sum_{l=0}^{k} v^l(x_0) + v^{k+1}(x_0) - x_0\right) = x_k + \frac{1}{k+1}\left(v^{k+1}(x_0) - x_0\right)$$

On passe à la limite dans $v\left(x_{\varphi(k)}\right) = x_{\varphi(k)} + \dfrac{1}{\varphi(k)+1}\left(v^{\varphi(k)+1}(x_0) - x_0\right)$ et on obtient $v(x) = x$.

En effet, v est continu (par linéarité et dimension finie) et le second terme du membre de droite tend vers 0, car K est de diamètre fini (car K est borné).

Étape 2 : Soit N une norme euclidienne sur V.

Pour tout $x \in V$, on pose

$$\nu(x) = \max_{u\in G} N(u(x)).$$

On va montrer que ν définit une norme G-invariante sur V.

Comme G est compact : pour tout $x \in V$, $\{u(x) | u \in G\}$ est compact.

On en déduit que ν est bien définie sur V.

Par ailleurs, on a : $\forall x \in V, \forall u \in G, \nu(x) = \nu(u(x))$, car la composition par u est une bijection du groupe G.

De plus :

- ν est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ car N l'est ;
- $\forall x \in V, \nu(x) = 0 \Rightarrow N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$ car les éléments de G sont linéaires et car N est une norme.

Il nous reste à montrer que ν vérifie l'inégalité triangulaire ; soient $x, y \in V$.

$\nu(x+y)$ étant définie à partir d'un maximum, on a :

$$\exists u_0 \in G, \nu(x+y) = N\left(u_0(x+y)\right).$$

Alors $\nu(x+y) \leq N\left(u_0(x)\right) + N\left(u_0(y)\right) \leq \nu(x) + \nu(y)$.

Et si on a l'égalité $\nu(x+y) = \nu(x) + \nu(y)$, alors $u_0(x)$ et $u_0(y)$ sont positivement liés, donc x et y aussi (car u_0 est inversible).

Étape 3 : Pour tout $u \in G$, on note $F_u = \{x \in K | u(x) = x\}$; on veut montrer que $\bigcap_{u\in G} F_u \neq \varnothing$.

K étant compact et les F_u étant fermés, pour tout $u \in G$, la propriété de Borel-Lebesgue nous invite donc à montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall u_1, \dots, u_p \in G, \bigcap_{k=1}^{p} F_{u_k} \neq \varnothing.$$

Soient donc $p \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_p \in G$; on pose $v = \dfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} u_k$.

Soit $a \in K$, tel que $v(a) = a$ (il existe car $v \in \mathcal{L}(V)$ stabilise K).

On a : $v(a) = v(v(a)) \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} v(u_k(a)) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} v(a) = v(a)$, en utilisant la G-invariance de v.
On déduit du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire de v que les $u_k(a)$ sont positivement liés, pour $k \in [\![1,p]\!]$.
Et comme $\forall k \in [\![1,p]\!], v(u_k(a)) = v(a)$, on obtient :

$$\forall k \in [\![1,p]\!], u_k(a) = u_1(a) = v(a) = a.$$

Donc $a \in \bigcap_{k=1}^{p} F_{u_k} \neq \varnothing$.
Et on conclut par Borel-Lebesgue. ■

Corollaire

Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe une forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset O(q)$.

Démonstration :

On munit G d'une nouvelle structure de groupe $(G, \lozenge)$ par : $\forall A, B \in G, A \lozenge B := BA$.
On pose :

$$\rho : \left| \begin{array}{ccc} (G,\lozenge) & \to & \mathrm{GL}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \\ A & \mapsto & (S \mapsto {}^tASA) \end{array} \right. .$$

- ρ est bien définie car $\forall A \in G, \rho(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ est inversible, d'inverse $\rho(A^{-1})$;
- ρ est un morphisme de groupes (pour la loi $\lozenge$) ;
- ρ est continue, car $\rho = (b \circ \Delta)|_G$, où $b : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \\ (A,B) & \mapsto & (S \mapsto {}^tASB) \end{array} \right.$ est continue (par bilinéarité et dimension finie) et $\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \\ A & \mapsto & (A,A) \end{array} \right.$ est continue (par linéarité et dimension finie).

$\rho(G)$ est un sous-groupe (car ρ est un morphisme de groupes et G un groupe) compact (car ρ est continue et G compact) de $\mathrm{GL}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$.
On pose $H = \{{}^tMM | M \in G\}$ et K l'enveloppe convexe de H.
La compacité de G implique celle de H puis celle de K.[1]
De plus, comme $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on obtient $H \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$; et comme $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe, on a $K \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Enfin,

$$\forall A \in G, \forall M \in G, \rho(A)({}^tMM) = {}^tA{}^tMMA = {}^t(MA)(MA) \in H \subset K ;$$

et donc par linéarité de $\rho(A)$, K est stable par $\rho(A)$.
On applique le résultat précédent pour obtenir :

$$\exists S \in K, \forall A \in G, S = \rho(A)(S) = {}^tASA.$$

Et comme $K \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a bien $G \subset O(q_S)$, où $q_S : x \mapsto {}^txSx$ est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. ■

Références

[Ale] M. ALESSANDRI – *Thèmes de géométrie, Groupes en situation géométrique*, Dunod, 1999.

1. On dispose du lemme suivant, conséquence du théorème de Carathéodory :

Lemme

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension $n < \infty$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, on suppose que $\mathcal{A} \neq \varnothing$ et que $\mathcal{A}$ est compact.
Alors son enveloppe convexe $\mathrm{Cv}(\mathcal{A})$ est compacte.

En effet, on pose $K = \{(t_1, \ldots, t_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} | t_1 + \ldots + t_{n+1} = 1\}$, c'est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$.
On définit $f : \left| \begin{array}{ccc} K \times \mathcal{E}^{n+1} & \to & \mathcal{E} \\ (t_1, \ldots, t_{n+1}, A_1, \ldots, A_{n+1}) & \mapsto & t_1A_1 + \ldots + t_{n+1}A_{n+1} \end{array} \right.$.
D'après Carathéodory, $f(K \times \mathcal{A}^{n+1}) = \mathrm{Cv}(\mathcal{A})$; or f est continue et $K \times \mathcal{A}^{n+1}$ est compact donc $\mathrm{Cv}(\mathcal{A})$ l'est aussi.

Méthode de Newton [2]

Florian LEMONNIER et Arnaud STOCKER – 13 mai 2015

[Rou], exercice 49

Théorème

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c,d]$; f s'annule donc en un unique point de $]c,d[$, noté a.
Pour $x_0 \in [c,d]$, on pose tant qu'on peut $x_{n+1} = F(x_n)$, où $F : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

1. Il existe $C > 0$, tel que si $|x_0 - a| < \dfrac{1}{C}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n$ est bien défini et $|x_n - a| \leq |x_0 - a|$.
   Dans ce cas, (x_n) converge vers a à vitesse quadratique.
2. Si $f'' > 0$ sur $[c,d]$ et $x_0 > a$, alors la suite (x_n) est bien définie, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > a$.
   Dans ce cas, on a l'équivalent : $x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$.

Démonstration :

Étape 1 : Soit $x \in [c,d]$, comme $f(a) = 0$, on a :

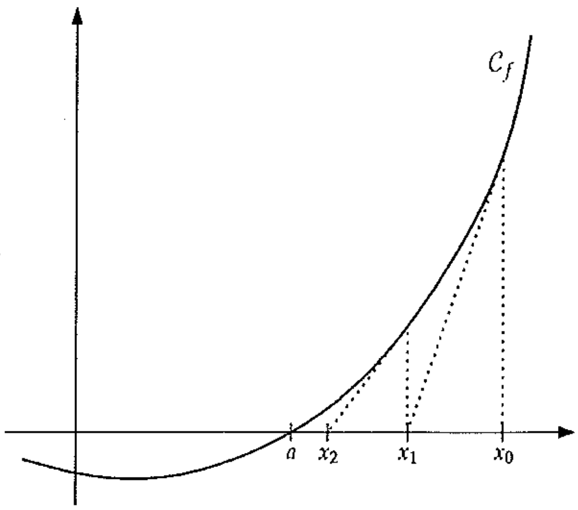
$$\begin{aligned} F(x) - a &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} - a \\ &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Et par l'égalité de Taylor-Lagrange, il existe z compris strictement entre a et x, tel que :

$$f(a) - f(x) - (a-x)f'(x) = \frac{(a-x)^2}{2} f''(z)$$

On en déduit donc :

$$F(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-a)^2$$



Étape 2 : Montrons la première partie du théorème.

On pose $C = \dfrac{\max |f''|}{2 \min |f'|}$; C est bien défini car f'' et f' sont continues sur le segment $[c,d]$, intervalle sur lequel $f' > 0$.
On a alors : $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$.
Soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{C}\right[$, tel que $I := [a - \alpha, a + \alpha] \subset [c,d]$;
Alors $\forall x \in I, |F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$, donc $F(x) \in I$ puis $F(I) \subset I$.

---

2. On dispose d'une application. Soit $y \in \mathbb{R}^{+*}$; imaginons qu'on veuille estimer $a = \sqrt{y}$. Soit $f : x \mapsto x^2 - y$, définie sur un intervalle $[c,d]$, avec $0 < c < d$ et $c^2 < y < d^2$. Pour approcher a, on doit itérer la fonction $F(x) = x - \dfrac{x^2 - y}{2x}$.

On a alors : $F(x) - a = \dfrac{(x-a)^2}{2x}$ et $F(x) + a = \dfrac{(x+a)^2}{2x}$.

Donc, en prenant $x_0 \in]a,d]$ et en posant $x_n = F^n(x_0)$, on obtient : $\dfrac{x_n + a}{x_n - a} = \left(\dfrac{x_0 + a}{x_0 - a}\right)^{2^n}$.

Par conséquent : $1 + \dfrac{2a}{x_n - a} = \left(1 + \dfrac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n} \geq 1 + \left(\dfrac{2a}{x_0 - a}\right)^{2^n}$.

On obtient donc un encadrement de l'erreur : $0 < x_n - a \leq 2a\left(\dfrac{x_0 - a}{2a}\right)^{2^n}$.

Par conséquent, si $x_0 \in I$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I$ et $|x_{n+1} - a| = |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2$.
Et par une récurrence immédiate, il vient :

$$C|x_n - a| \leq (C|x_{n-1} - a|)^2 \leq \ldots \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$$

Ce qui prouve la convergence d'ordre 2 de (x_n) vers a car $C\alpha < 1$, dans le cas où $|x_0 - a| \leq \alpha$.

Étape 3 : Utilisons désormais l'hypothèse supplémentaire : $f'' > 0$ sur le segment $[c, d]$.

Pour $x \in]a, d]$, on a : $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} < x$ car $f' > 0$ et f s'annule en a.

D'autre part : $\exists z \in]a, x[, F(x) - a = \dfrac{f''(z)}{2f'(x)}(x-a)^2 > 0$ car f'' et f' sont strictement positives.

Ainsi, $\forall x \in]a, d], a < F(x) < x \leq d$, donc $]a, d]$ est stable par F.
On a même : si $x_0 \in]a, d]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in]a, d]$ et la suite (x_n) décroît.
Comme (x_n) est également minorée par a, la suite (x_n) converge ; on note $l \in [a, d]$ sa limite.
l est un point fixe de F donc par conséquent $f(l) = 0$ et donc $l = a$.
Comme dans le cas précédent, $|x_{n+1} - a| \leq C|x_n - a|^2$ et donc la convergence est quadratique.

Étape 4 : Enfin, cette inégalité est essentiellement optimale.

Si $a < x_0 \leq d$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in]a, d]$ et $\exists z_n \in]a, x_n[, \dfrac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z_n)}{f'(x_n)}$.

Par continuité de f' et f'', on déduit $\dfrac{f''(z_n)}{2f'(x_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{f''(a)}{2f'(a)}$, d'où finalement :

$$x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$$

■

Références

[Rou] F. ROUVIÈRE – *Petit guide de calcul différentiel*, 3e éd., Cassini, 2009.