LEÇON 106 : Groupe Linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous groupes de GL(E). Applications

Dans ce plan on notera K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie n

I Groupe linéaire et groupe spécial linéaire.

Définition 1 : On appelle groupe linéaire de E et on note $GL(E)$ l'ensemble des automorphisme de E. $(GL(E), \circ)$ est un groupe.

Définition 2 : On note $GL_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de taille n.

Proposition 3 : Si $n = \dim E$ $GL_n(K)$ et $GL(E)$ sont isomorphes. L'isomorphisme est fixé par le choix d'une base de E.

Remarque 4. Cet isomorphisme permet l'utilisation des outils du calcul matriciel pour l'étude de $GL(E)$.

Proposition 5 : Un élément f de $L(E)$ est élément de $GL(E)$ ssi f injective
ssi f surjective
ssi $\det(f) \neq 0$
ssi f envoie une base de E sur une base de E.

Remarque 6 : Cette caractérisation est fausse en dimension infinie : - Pour $E = K[X]$ $f : P \mapsto XP$ est injective mais pas surjective. $f : P \mapsto P'$ est surjective mais pas injective.

Proposition 7 : Le determinant est un morphisme de $GL_n(K)$ dans les inversibles de K.

Définition 8 : On appelle groupe special linéaire le noyau de l'application déterminant. On note $SL_n(K) = \{M \in GL_n(K) \mid \det(M) = 1\}$.

Définition 9 : On note $SL(E) = \{u \in GL(E) \mid \det(u) = 1\}$ car le déterminant ne dépend pas de la base choisie.

I.2 Générateurs

Proposition 10 : Soit H un hyperplan de E et $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = id_H$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\det u = \lambda \neq 1$
- u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et u est diagonalisable
- $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \not\subset H$
- Il existe une base B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 1$

Définition 11 : Les éléments de $GL(E)$ qui vérifient la proposition sont appelés dilatation d'hyperplan H, de rapport λ et de droite $D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Si $\lambda = -1$ il s'agit d'une réflexion.

Exemple 12 : $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $X^k \mapsto \begin{cases} X^k & \text{si } k \neq 1 \\ 2X & \text{si } k = 1 \end{cases}$ est une dilatation.

Proposition 13 : Soit H hyperplan de E tel que $H = \ker f$, $f \in E^*$. Soit $u \in GL(E)$, $u \neq Id$ et $u_{|H} = Id_{|H}$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- $\det(u) = 1$
- u n'est pas diagonalisable.
- $Im(u - Id) \subset H$
- Il existe $a \in H$, $a \neq 0$ tel que $u = x \mapsto x + f(x).a$
- Il existe une base B de E telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

Définition 14 : Les éléments de $GL(E)$ qui vérifient la proposition 13 sont appelés transvection d'hyperplan H et de droite $D = Im(u - Id)$. De plus $D = Vect(a)$ et $D \subset H$.

Remarque 15 : Toute transvection peut s'écrire dans une bonne base $I_n + \lambda E_{ij}$, $\lambda \neq 0$.

(DEV1) Proposition 16 : $SL(E)$ est engendré par les transvections

~~Pro~~position 17 : $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations

~~Exemple 18~~ 18 Cf annexe 1

Application 19 : Algorithme du pivot de Gauss, pour le calcul de solutions de $AX = B$ ou le calcul de dimension de sous espaces

Application 20 : Le centre de $GL_n(K)$ est $\{\lambda I_n, \lambda \in K^*\}$

Le centre de $SL_n(K)$ est $\{\lambda I_n, \lambda \in K \text{ et } \lambda^n = 1\}$

1.3 Topologie. Ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La topologie est celle de la norme euclidienne.

Proposition 21 : $GL(E)$ est un ouvert dense de $L(E)$.

Application 22 : Le polynôme caractéristique de AB est égal à celui de BA pour $A, B \in M_n(K)$.

Proposition 23 : Si $K = \mathbb{C}$, $GL(E)$ est connexe par arcs
$SL(E)$ est connexe par arcs (DEV1)

Remarque 24 : Si $K = \mathbb{R}$ $GL(E)$ n'est pas connexe.

2. D'autres sous-groupes de $GL(E)$.

2.1 sous groupes finis

Définition 25 : Soit σ une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Une matrice de permutation est une matrice de coefficient $(m_{ij}) = (\delta_{i\sigma(j)}) = M_\sigma$

Exemple 26 : figure 2 annexe.

Proposition 27 : L'application $\begin{cases} \mathfrak{S}_n \longrightarrow GL_n(K) \\ \sigma \longmapsto M_\sigma \end{cases}$ est un morphisme de groupe injectif.

Proposition 28 : Théorème de Cayley : Un groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Application 30 : Tout sous groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous groupe de $GL_n(K)$.

Proposition 31 : Le cardinal de $GL_n(F_p)$ pour p premier est $\prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} m$ où $p \wedge m = 1$

Application 32 : Les matrices de $GL_n(F_p)$ de la forme $I_n + T$, où T est triangulaire supérieure stricte, forment un p-groupe de Sylow de $GL_n(F_p)$.

Application 33 : Tout groupe fini dont l'ordre est divisible par p possède un p groupe de Sylow.

Proposition 34: Théorème de Burnside : Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ ~~d'exposant~~ fini, alors G est fini. (DEV 2)

Contre exemple 35: Pour $K = \mathbb{F}_2(X)$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in K \right\}$ est un sous groupe infini de $GL_2(K)$ d'exposant 2.

2.2 Groupe Orthogonal

On suppose K de caractéristique différente de 2 et q une forme quadratique définie positive sur E.

Définition 36: On appelle groupe orthogonal associé à q l'ensemble $\{u \in GL(E) \mid \forall x \in E\ q(u(x)) = q(x)\}$ des isométries notée $O(q)$

Proposition 37: $\forall u \in O(q)$ $\det(u) = \pm 1$

Définition 38: On appelle groupe spécial orthogonal associé à q $SO(q) = \{u \in O(q) \mid \det(u) = 1\}$.

Définition 39: On nomme symétrie orthogonale tout élément u de $O(q)$ tel que $u \neq id_E$ et $u^2 = id_E$

Proposition 40: Si u est une symétrie, il existe 2 sous espaces supplémentaires E^+ et E^- tels que $u_{|E^+} = id_{E^+}$ et $u_{|E^-} = -id_{E^-}$

Définition 41: Soit u une symétrie orthogonale. Si u fixe un hyperplan, on dit que u est une réflexion orthogonale. Si $\dim(E^-) = 2$, on dit que u est un renversement orthogonal

Théorème 42 (Cartan Dieudonné). Tout élément de $O(q)$ s'écrit comme produit de moins de n réflexions orthogonales

Corollaire 43 Si $n \geq 3$, tout élément de $SO(q)$ s'écrit comme produits d'au plus n renversements orthogonaux

2.3. Le cas particulier de $O_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la norme euclidienne.

Théorème 44 Soit $u \in O_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & R_{\theta_1} \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & R_{\theta_p} \end{pmatrix}$$

où $R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$

Corollaire 45 $SO_2(\mathbb{R})$ est commutatif

Application 46 $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

Théorème 47 $O_n(\mathbb{R})$ est compact

Théorème 48 (décomposition polaire).

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $\exists! (O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$

De plus, $\begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto (O,S) \end{cases}$ est un homéomorphisme

Application 49 $O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$

Application 50 $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes

Application 51 L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne)

Références : Szpirglas Algèbre L3

Perrin, Cours d'algèbre

Oraux X-ENS algèbre 2

Objectif agrégation

Mneimné Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie

ANNEXE 1

Une décomposition en produit de transvections et dilatations de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ANNEXE 2

Pour $n = 4$, à la permutation $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ correspond

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Générateurs du groupe linéaire [Oraux X-ENS alg 2 p 177]

Th Soit $n \geq 2$ et K un corps.

Alors $SL_n(K)$ est engendré par les transvections et $GL_n(K)$ par les transvections et dilatations.

Rappel Toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $i \neq j$ et $\lambda \neq 0$ est une matrice de transvection ; toute matrice de la forme $I_n + (\alpha - 1) E_{ii}$ où $\alpha \neq 1$ est une dilatation.

Rq Le théorème reste vrai même pour $n = 1$.

La seule matrice de $SL_1(K)$ est (1) qui est produit de 0 transvections et les matrices de $GL_1(K)$ sont de la forme (α) où $\alpha \neq 0$ donc sont des dilatations.

démo Th • On remarque d'abord que multiplier à gauche une matrice $M \in M_n(K)$ (resp. à droite) par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer sur les lignes (resp colonnes) l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$)

On peut aussi échanger 2 lignes (ou deux colonnes) en multipliant M à droite (resp. à gauche) par le produit de transvections $T_{ij}(1) T_{ji}(-1) T_{ij}(1) = T$

Plus précisément TM est la matrice M dans laquelle $L_i \leftarrow L_j$ et $L_j \leftarrow -L_i$

MT " " " " " " $C_i \leftarrow C_j$ et $C_j \leftarrow -C_i$

• Soit $A \in GL_n(K)$. Comme A est inversible, sa première colonne est non nulle. Deux cas se présentent alors.

→ si $\exists\, i \geq 2$ tq $a_{i1} \neq 0$, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a_{11} - 1}{a_{i1}} L_i$ permet de mettre un "1" en position $(1,1)$ dans A

→ sinon, on effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_2$ (donc $L_2 \leftarrow -L_1$) et on se retrouve dans le cas précédent car $a_{11} \neq 0$

Puis, en utilisant le coefficient en position $(1,1)$ (qui vaut désormais 1) comme pivot, on peut annuler tous les autres coefficients de la $1^{ère}$ ligne et de la $1^{ère}$ colonne.

Par le lemme, $D - I_n$ est donc nilpotente

De plus, $\forall M \in G$, $P = X^N - 1$ est 1 pol annulateur de M

Comme P est SARS, toutes les matrices de G sont diagonalisables
dans $\mathbb{C}$

en particulier D

Donc $D - I_n$ est diag et nilp $\Rightarrow D - I_n = 0 \Rightarrow A = B$

$\rightarrow$ l'image de g est $< \infty$

$Im(g) \subset T^m$ où $T = \{ tr(A) \mid A \in G \}$

Or les élé de G sont tous diag et leurs vps sont des racines N^e de 1

De $|X| \leq \#$ sommes qu'on peut faire avec les N racines N^e de 1 avec n termes

$\leq N^n$

$\rightarrow$ ccl $|G| \leq |Im(g)|^{\text{par inj}} \leq (N^n)^m \leq N^{n^3}$ car $m \leq n^2 = \dim GL_n(\mathbb{C})$

$< \infty$

Th Burnside [Francinou X-ENS alg 2 p 185]

• **Th** Soit G s-gp de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant $< \infty$ pour $\times$ (cad $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall A \in G, A^N = I_n$)

Alors G est $< \infty$

• **Lemme** $A \in M_n(\mathbb{C})$. A est nilp $\Leftrightarrow \forall k \geq 1, \ tr(A^k) = 0$

démo $\Leftarrow$ clair en trigonalisant A

$\Rightarrow$ /abs A pas nilp. Alors $\exists \lambda$ vp de $A \neq 0$

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les vps $\neq$ et $\neq 0$ de A de mult $m_1, \dots, m_r \neq 0$ $(r \geq 1)$

On trigonalise A (car ds $M_n(\mathbb{C})$ tout le monde est trigonalisable)

et /hyp, $\forall k \geq 1 \quad m_1 \lambda_1^k + \dots + m_r \lambda_r^k = 0$

Si ${}^t(m_1, \dots, m_r)$ est solut° de $\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \cdots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0$

donc est nul car

A est de det $\neq 0$ car Vandermonde avec les λ_i deux à deux $\neq$

$\Rightarrow X$.

démo Soit N l'exposant $< \infty$ de G et $(M_1, \dots, M_m)$ 1 base de $Vect(G)$

construite d'élément de G (qui $\exists$ car $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ de dim $< \infty$)

Soit $f : \begin{cases} G \to \mathbb{C}^m \\ A \mapsto (tr(AM_1), \dots, tr(AM_m)) \end{cases}$

→ f est injective car si A, B et tq $f(A) = f(B)$

alors $\forall i$, $tr(AM_i) = tr(BM_i)$ puis par linéarité,

$\forall M \in G, \ tr(AM) = tr(BM)$ (car (M_i) := base $Vect(G)$)

Or $D = AB^{-1} \in G$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, \ tr(D^{k+1}) = tr(A\underbrace{B^{-1}D^k}_{\in G}) = tr(BB^{-1}D^k) = tr(D^k)$

donc /rec $\forall k \in \mathbb{N}, \ tr(D^k) = tr(I_n) = n$.

Comme D et I_n commutent, /Newton, $\forall k \geq 1$

$$Tr((D - I_n)^k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \, tr(D^{k-j})$$
$$= n \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \right) = n(1-1)^k = 0$$

Par le lemme, $D - I_n$ est donc nilpotente

De plus, $\forall M \in G$, $P = X^N - 1$ est 1 pol annulateur de M

Comme P est SARS, toutes les matrices de G sont diagonalisables
dans $\mathbb{C}$

en particulier D.

Donc $D - I_n$ est diag et nilp $\Rightarrow D - I_n = 0 \Rightarrow A = B$

$\rightarrow$ l'image de f est $< \infty$

$\mathrm{Im}(f) \subset T^m$ où $T = \{ \mathrm{tr}(A) \mid A \in G \}$

Or les élt de G sont tous diag et leurs vp sont des racines N^e de 1

Donc $|X| \leq \#$ sommes qu'on peut faire avec les N racines N^e de 1 avec n termes

$\leq N^n$

$\rightarrow$ ccl $|G| \leq |\mathrm{Im}(f)|$ par inj $\leq (N^n)^m \leq N^{n^3}$ car $m \leq n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$< \infty$