Leçon 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Définition 1. *Soient X, E deux espaces topologiques, $Y \subsetneq X$. Soit l'application $f : Y \to E$. Un prolongement de f sur X est une application $g : X \to E$ telle que $g_{|Y} = f$.*

1 Prolongement et continuité

1.1 Prolongement et continuité uniforme

Définition 2. *Soient $f : D \in (E,d) \to (F,d'), a \in D$ un point d'accumulation de D. Lorsque f n'est pas définie en a et lorsque $\lim_{x \to a} f(x) = l$, la fonction g définie sur $D \cup \{a\}$ par $g(x) = f(x)$ sur D et $g(a) = l$ est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f en a.*

Exemple 1. *La fonction définie par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0.*

Théorème 1. *Principe de prolongement des identités.*
Soient f, g deux fonctions continues de l'espace topologique E dans l'espace vectoriel normé F. Si f et g coïncident sur une partie dense alors elles sont égales.

Théorème 2. *Soient $(E,d), (F,\delta)$ deux espaces métriques, F étant complet, A une partie dense de E et f une application uniformément continue de A dans F. Il existe une unique application continue g de E dans F qui prolonge f. De plus g est uniformément continue.*

Applications 1. *-Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.*
-Le complété d'un espace métrique (E,d) est unique à isométrie près : Soient $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ deux espaces métriques complets tels qu'il existe une isométrie i_1 (respectivement i_2) de E dans E_1 (respectivement dans E_2), avec $i_1(E)$ (respectivement $i_2(E)$) dense dans E_1 (respectivement dans E_2). Alors il existe une unique isométrie ϕ de E_1 dans E_2 bijective et vérifiant $\phi(i_1(x)) = i_2(x)$ pour tout $x \in E$.

Théorème 3. *Théorème de Tietze.*
Soient (X,d) un espace métrique, Y un fermé de X, $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ continue. Alors g_0 admet un prolongement continu $f_0 : X \to \mathbb{R}$.

Théorème 4. *Théorème de Plancherel.*
A chaque fonction de L^2, on peut associer une fonction $\hat{f}$ de L^2 de sorte que les propriétés suivantes soient satisfaites :
a) Lorsque f est dans $L^1 \cap L^2$, $\hat{f}$ est la transformée de Fourier de f.
b) Pour tout f dans L^2, on a $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.
c) L'application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de L^2 dans L^2.

1.2 Prolongement de formes linéaires

Théorème 5. *Théorème de Hahn-Banach.*
Soient E un espace vectoriel normé et p une application vérifiant :
1)$\forall x \in E, \forall \lambda > 0, p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
2)$\forall (x,y) \in E^2, p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
Soit d'autre part $G \in E$ un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $g(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in G$. Alors il existe une forme linéaire f définie sur E qui prolonge g i.e $\forall x \in G, g(x) = f(x)$ et telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Corollaire 1. *Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue de norme $\|g\|_{G'} = \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} g(x)$. Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.*

Application 1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. F est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire qui s'annule sur F s'annule sur E.*

2 Prolongement et différentiabilité

2.1 Prolongement et régularité

Proposition 1. *Soit une f fonction continue de l'intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel normé E, soit a un point de I. Si f est dérivable sur $I - \{a\}$ et si f' possède une limite l au point a alors f est dérivable en a de dérivée l.*

Exemple 2. *La fonction f définie par :*

$$\begin{array}{rcll} f(t) & = & \exp(-\frac{1}{t}) & si\ t > 0 \\ & & 0 & sinon \end{array}$$

admet un prolongement de classe C^∞ en 0.

Application 2. *Existence des fonctions plateaux.*

Théorème 6. *Théorème de Borel*
Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}, u^{(k)}(0) = a_k$.

Corollaire 2. *Toute fonction C^∞ sur un intervalle compact $[a, b]$ avec des dérivées de tout ordre à droite en a, à gauche en b peut être prolongée en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

2.2 Prolongement et équations différentielles

Considérons l'équation différentielle

$$(\mathcal{E})\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(t, x(t)).$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, continue, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, x est une fonction C^1 de $t \in I$ à valeurs dans Ω.

Définition 3. *Solution : Une solution de $\mathcal{E}$ est un couple (x, J) où J est un intervalle contenu dans I et x est une fonction C^1 de J dans Ω qui vérifie $\mathcal{E}$ en tout point de $\mathring{J}$.*
Problème de Cauchy : Etant donné $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ le problème de Cauchy consiste à trouver une solution (x, J) de $\mathcal{E}$ telle que $t_0 \in J$ et $x(t_0) = x_0$.
Solution globale : Soit (x, J) une solution de $\mathcal{E}$. Si $I = J$, on dit que la solution est globale.
Prolongement de solution : Soient $(x_1, J_1), (x_2, J_2)$ deux solutions de $\mathcal{E}$. On dit que (x_2, J_2) prolonge (x_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $x_1(t) = x_2(t)$ pour tout $t \in J_1$.
Solution maximale : Une solution (x, J) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.

Théorème 7. *Supposons f définie sur $]a, b[\times\mathbb{R}^n$. Soit (x, J) une solution maximale de $\mathcal{E}$, où $J =]T_*, T^*[$. Alors*

$$\left\{\begin{array}{lcl} ou\ bien\ T^* & = & b \\ ou\ bien\ T^* & < & b\ et\ \lim\limits_{t\to T^*} |x(t)| = +\infty. \end{array}\right.$$

de même

$$\left\{\begin{array}{lcl} ou\ bien\ T_* & = & a \\ ou\ bien\ T_* & > & a\ et\ \lim\limits_{t\to T_*} |x(t)| = +\infty. \end{array}\right.$$

Corollaire 3. *Critère de prolongement.*
Soit (x, J) une solution de $\mathcal{E}$ où $J =]\alpha, \beta[, a < \alpha < \beta < b$. Supposons qu'il existe $\delta > 0, A > 0$ tels que $|x(t)| \leq A$ pour tout $t \in [\beta - \delta, \beta[$ (respectivement $]\alpha, \alpha + \delta]$) alors x peut être prolongée au-delà de β (respectivement au-delà de α) en une solution de $\mathcal{E}$.

Application 3. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ où $I =]a, b[$. Supposons que f soit continue et bornée i.e.*

$$\exists M > 0\ \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n |f(x,t)| \leq M$$

alors toute solution du problème $\mathcal{E}$ est globale.

Exemple 3. *Le problème sur $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{cases} x'(t) &= \dfrac{x^2(t)}{1+x^2(t)} \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

+ problème de Dirichlet

admet pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ une solution unique définie sur $]-\infty, +\infty[$.

3 Prolongement et holomorphie

Théorème 8. *Principe de réflexion de Schwarz*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Supposons que Ω soit symétrique par rapport à l'axe des réels. Soit f une fonction holomorphe dans l'ouvert $\Omega' = \Omega \cap \{Im(z) > 0\}$ et continue sur $\overline{\Omega'}$. On suppose que f prend des valeurs réelles aux points de l'axe réel. Alors f s'étend en une fonction holomorphe dans Ω tout entier.

Prolongement analytique

Théorème 9. *Principe des zéros isolés.*
Soit f une fonction analytique non constante sur l'ouvert connexe Ω. Les zéros de f forment un ensemble de points isolés.

Corollaire 4. *Prolongement analytique.*
Soient f et g deux fonctions analytiques définies sur l'ouvert connexe Ω. Si l'ensemble des points a tels que $f(a) = g(a)$ possède un point d'accumulation dans Ω, les fonctions f et g coïncident sur Ω.

Application 4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Soit f la somme de cette série dans D(0,1). La fonction f possède au moins une singularité essentielle sur le cercle de centre 0, de rayon 1.*

Application 5. *Prolongement de la fonction ζ à $\mathbb{C} - \{1\}$.*
Il existe une fonction ζ holomorphe dans $\mathbb{C} - \{1\}$ avec :
a)$\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \eta(s), \eta$ *holomorphe dans* $\mathbb{C}$.
b)$\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ *pour* $s \in \mathbb{C}, Re(s) > 1$.
c)$I(s) = I(1-s)$ *si* $I(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$, *où* $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{z-1}\exp(-x)dx, z \in \{u \in \mathbb{C} | Re(u) > 0\}$.

Références

[1] Gourdon. *Analyse.*

[2] Pommelet. *Cours d'Analyse.*

[3] Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel.*

[4] Zuily-Queffélec. *Eléments d'Analyse pour l'agrégation.*

[5] Amar-Matheron. *Analyse complexe.*

[6] Brézis. *Analyse fonctionnelle.*

[7] Rudin. *Analyse réelle et complexe.*