207

Prolongement de fonctions. Ex et app

Déf 0 Y et E deux espaces topologiques, $X \subset Y$ et $f : X \to E$. Un prolongement $\hat{f}$ de f sur Y est une application $\tilde{f} : Y \to E$ telle que $\tilde{f}_{|X} = f$.

I Prolongement et continuité.

1) Prolongement et continuité uniforme [POM]

Prop 1 Soit $f : D \subset (E,d) \to (F,d')$ (métriques) et $a \in \bar{D}$, si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$ alors $g : D \cup \{a\} \to F$ définie par $g_{|D} = f$ et $g(a) = l$ est un prolongement continu de f.

Ex 1 $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée en 0 par 0
$x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ " 0 " 0

Th 1 Soient (E,d), (F,d') deux métriques, F complet. A partie dense de E et $f : A \to F$ uniformément continue. Alors il existe une unique application continue $g : E \to F$ qui prolonge f. De plus g est uniformément continue.

Rq 1 Si f est linéaire continue, f est lipschitzienne donc uniformément continue.

Applications :
- Unicité, à isométrie près, du complété d'un espace métrique.
- Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

- **Th 2** (Fourier-Plancherel) [RUD] (DVP)

L'application
$$L^1(\mu) \cap L^2(\mu) \to L^2(\mu)$$
$$f \mapsto \hat{f} \quad x \mapsto \int f(x) e^{-ixt} d\mu(t)$$
où $\mu = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}$ se prolonge en une isométrie de $L^2(\mu)$ sur $L^2(\mu)$ (λ mesure de Lebesgue)

Th 3 (Tietze) (E,d) métrique, X fermé de E. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue, alors f admet un prolongement continu sur E.

Application
- **Prop 2** Soit (E,d) un espace métrique, si toutes les fonctions continues de E dans $\mathbb{R}$ sont bornées alors E est compact.

2) Prolongement des applications linéaires. [BRE]

E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

Th 4 (Hahn-Banach - Forme analytique)
Soit $p : E \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall x \in E, \forall \lambda > 0$
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in E$

Soit $G \subset E$ sous espace vectoriel et $g : G \to \mathbb{R}$ forme linéaire telle que
- $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in G$

Alors il existe une forme linéaire $\tilde{g}$ sur E qui prolonge g i.e. $\tilde{g}_{|G} = g$ et telle que $\tilde{g}(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E$

Cor 1 $\forall x \in E$, il existe $f \in E'$ telle que $\|f\| = \|x\|$ et $\langle f ; x \rangle = \|x\|^2$

Application – Prop 3 F sous espace vectoriel de $(E ; \| \|)$ F est dense dans E ssi toute forme linéaire qui s'annule sur F est nulle.

II Prolongement et différentiabilité

1) Prolongement et regularité [POM]

Prop 4 Soit f $I \to \mathbb{R}$ continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Et soit $a \in I$. Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\exists \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = l$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Contre-ex 1 Si f non continue, prendre
$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

ex 2 $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est une fonction C^∞ et $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Application Prop 5 Il existe une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle hors compact, égale à 1 sur $[a, b]$, $[a-\varepsilon, b+\varepsilon]$.

Th 5 (Borel) Pour toute suite (a_k) de $\mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(k)}(x_0) = a_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Cor 1 Toute fonction C^∞ sur $[a, b]$ compact peut être prolongée en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Equations différentielles. [Z-Q]

I intervalle de $\mathbb{R}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, f $I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue

on considère : (E) $\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$

où x est C^1 à valeurs dans Ω.

Def 1 - Une solution de (E) est un couple (x, J) où J est un intervalle inclus dans I et x fonction C^1 de J dans Ω qui vérifie (E) en tout point de $\mathring{J}$.

- Soit (x, J) solution de E, si $I = J$ on dit que la solution est globale.
- Soient $(x_1 ; J_1)$, $(x_2 ; J_2)$ deux solutions de (E). On dit que $(x_2 ; J_2)$ prolonge (x_1, J_1) si $J_2 \supset J_1$ et $x_2|_{J_1} = x_1$.
- Une solution $(x ; J)$ est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement.

Th 6 f $I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue. Par tout point $(t_0 ; x_0)$ de $I \times \Omega$ il passe une solution maximale (x, J) où J est un intervalle ouvert dans I. $J =]T_*, T^*[$. Si de plus f est localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable alors cette solution est unique.

Th 7 Si f $]a, b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Soit (x, J) une solution maximale de (E) où $J =]T_*, T^*[$

Alors $\begin{cases} \text{ou bien } T^* = b \\ \text{ou bien } T^* < b \text{ et } \lim_{t \to T^*} |x(t)| = +\infty \end{cases}$

et $\begin{cases} \text{ " " } T_* = a \\ \text{ " " } T_* > a \quad \lim_{t \to T_*} |x(t)| = +\infty \end{cases}$

Cor 2 Soit (x, J) solution avec $J =]\alpha ; \beta[$ $a < \alpha < \beta < b$
Si x est bornée au voisinage de β (resp α)

alors x peut être prolongée au delà de β (resp α) en une solution de (E).

Ex 3 Si f $]a;b[\times\mathbb{R}^n$ est bornée alors toute solution de (E) est globale, par exemple

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{1+x^2(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$ admet $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ une unique solution sur $\mathbb{R}$.

III Aspect analytique

1) Comportement d'une série entière au bord du disque de convergence. [GOU]

Th 8 (Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On pose $f(z) = \sum a_n z^n$ $|z|<1$ et $\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C} \ |z|<1$ et $\exists \rho>0, \theta\in[-\theta_0;\theta_0]\ z = 1-\rho e^{i\theta} \}$ $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ alors $\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_n a_n$

Th 9 (Taubérien faible) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série sur le disque unité. On suppose que $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = S \in \mathbb{C}$

Si $a_n = o(1/n)$ alors $S = \sum_n a_n$.

Rq 2 Encore vrai pour $a_n = O(1/n)$.

2) Fonction holomorphe [A-M]

Th 10 (Zéros isolés) Soit f holomorphe sur Ω ouvert connexe. Si $f\neq 0$ alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation.

Th 11 (Principe de prolongement) Ω ouvert connexe. Si deux fonctions holomorphes coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation alors elles sont égales sur Ω.

Ex 4 La fonction $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ pour $Re(z)>0$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles, tous simples, sont $\mathbb{Z}^-$. (DVP)

Ex 5 La fonction $\zeta(z) = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^z}$ pour $Re(z)>1$ se prolonge méromorphiquement sur $\{Re(z)>0\}$ avec pour pôle simple le point $z=1$.

IV Théorie de la mesure [B-L]

Ω un ensemble.

Def 2 $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une algèbre sur Ω si
(i) $\Omega \in \mathcal{C}$ (ii) $A\in\mathcal{C} \Rightarrow A^c \in \mathcal{C}$
(iii) $A_1, \dots A_n \in \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{C}$

Def 3 Une application définie sur une algèbre $\mathcal{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}$ est dite additive si $\mu(\emptyset)=0$ et si $\mu(\bigcup_{1\leq i\leq n} A_i) = \sum_{1\leq i\leq n} \mu(A_i)$ pour tous $A_1, \dots A_n \in \mathcal{C}$ disjoints.

Th 12 (Extension de Carathéodory)
Soit μ une application positive, additive définie sur $\mathcal{C}$ algèbre de Ω. Si pour toutes suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}$ de réunion $A\in\mathcal{C}$, $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ alors μ se prolonge en une mesure sur $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$. De plus si μ est σ-finie sur $\mathcal{C}$, le prolongement est unique et σ-fini.

Ex 6 $\mathcal{C} = \{$union finie disjointe d'intervalles $]a;b]$ $a,b\in\overline{\mathbb{R}}\}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$. μ définie sur $\mathcal{C}$ par $\mu(\bigcup_{1\leq i\leq n}]a_i;b_i]) = \sum_{1\leq i\leq n}(b_i - a_i)$ se prolonge sur $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ en la mesure de Lebesgue.

Bibliographie :

[A-M] : Amar-Matheron, Analyse complexe
[GOU] : Gourdon, Analyse
[B-L] : Barbe-Ledoux, Probabilité
[Z-Q] : Zuily - Queffélec, Analyse pour l'agrégation
[POM] : Pommellet, Cours d'analyse
[BRE] : Brezis, Analyse fonctionnelle