207 — **Prolongement de fonctions. Exemples et applications.**

I) Prolongements d'un point de vue topologique

1) Prolongement par continuité en un point

[ROM]

__Prop 1__ : Soient (X,d), $(Y,\tilde{d})$ des espaces métriques, $U \subset X$ un ensemble, et $c \in U$. Soit $f : U \setminus \{c\} \to Y$ continue, et telle que $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in U}} (f(x))$ existe dans Y.
Alors f se prolonge continûment à U avec $f(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in U}} (f(x))$.

__Ex 2__ : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{array}$ se prolonge continûment en 0 par 1.
Cela permet de définir la fonction sinc.

__Contre-ex 3__ : $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(\frac{1}{x^2}) \in \mathbb{R}$ ne se prolonge pas continûment en 0.

__Appli 4__ : Soit $f : I \to \mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$, de classe C^1.
Alors, $\forall y \in I$, $x \in I \setminus \{y\} \mapsto \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \in \mathbb{R}^m$ se prolonge continûment en y par $f'(y)$ car $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \int_0^1 f'(x+(y-x)t)\,dt$.

__Prop 5__ : Soient $a < b \in \mathbb{R}$, E un Banach, et $f \in C^1([a;b[;E)$.
Si f' est bornée sur $[a;b[$, alors f se prolonge continûment en b.

__Ex 6__ : Soit $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Alors $x \in]0,1] \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\ln(x)u} f(u)\,du$ est C^0 et se prolonge continûment par 0 en 0.

2) Prolongement par densité

[POM]

__Théorème 7__ : Soient (X,d), $(Y,\tilde{d})$ des esp métriques complets, et $F \subset X$ tq $\overline{F} = X$.
Soit $f : F \to Y$ uniformément continue sur F.
Alors f admet un unique prolongement $\tilde{f}$ à X tout entier, et $\tilde{f}$ est unif continue.

__Application 8__ : Si $E, \tilde{E}$ sont des esp de Banach, F s-ev dense dans E, et $f : F \to \tilde{E}$ linéaire continue, alors f se prolonge en une application linéaire continue $\tilde{f}$ sur E tout entier, et $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

[POM]

__Application 9__ : Soit E un Banach et $[a;b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale de Riemann est bien définie, linéaire, continue sur l'espace des fonct étagées de $[a;b]$ vers E pour $\|\cdot\|_\infty$.
On peut ainsi la prolonger à $R([a;b];E) = \overline{\mathcal{E}([a;b];E)}^{\|\cdot\|_\infty}$ l'espace des fonctions réglées de $[a;b] \to \mathbb{R}$. On a que $C^0([a;b];E) \subset R([a;b];E)$.

__Application 10__ : (__Lemme de Riemann-Lebesgue__)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R})$: $\hat{f}(s) \underset{s \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

__Application 11__ (__Théorème de Fourier-Plancherel__) **[DEV 1]** [RUD] [FAR]
$\forall f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.
La transformée de Fourier se prolonge à L^2 en une isométrie $L^2 \to L^2$.

__Application 12__ (__Inégalité de Hardy__) [CHA]
Pour $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, $1 < p < +\infty$, $F : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ est bien définie, et $\|F\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}$.

3) Prolongement de fonctions continues sur des fermés

[ZQ]

__Prop 13__ : (__Théorème de Tietze__)
Soit (X,d) métrique, Y un fermé de X, et $g \in C(Y;\mathbb{R})$.
Alors $\exists f \in C(X;\mathbb{R})$ tq $f_{|Y} = g$, avec $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ si g bornée.

__Appli 14__ :
Soit (X,d) métrique, Y_1, Y_2 fermés disjoints de X.
Alors $\exists f \in C^0(X;[0,1])$ tq $f_{|Y_1} \equiv 0$ et $f_{|Y_2} \equiv 1$.

__Appli 15__ :
Soit (X,d) métrique.
- Si $C^0(X;\mathbb{R}) \subset L^\infty(X;\mathbb{R})$, alors X est compact.
- Si $C^0(X;\mathbb{R}) \subset UC(X;\mathbb{R})$ et que X est sans point isolé, alors X est compact.

__Ex 16__ : Pour $f \in C^0([a,b];E)$, E Banach, on peut prolonger continûment f sur $\mathbb{R}$ de diverses façons, comme $\tilde{f} \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus [a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}]$ ou $\tilde{f}$ $(b-a)$-périodique sur $\mathbb{R}$.

II) Prolongement d'un point de vue différentiel

1) Prolongement dérivable

Prop 17 : Soit $f : [a;b] \to E$, E un Banach, de classe C^1 sur $[a;b] \setminus \{c\}$.
Si $\lim\limits_{\substack{x \to c \\ x \in [a;b]}} (f'(x))$ existe, alors f est de classe C^1 sur $[a;b]$ tout entier.

Appli 18 : Pour $f \in C^k([a;b];E)$, $\forall y \in [a;b]$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(y) & \text{si } x = y \end{cases}$ est de classe C^{k-1} sur $[a;b]$.

Ex 19 : $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ se prolonge de façon C^∞ à $\mathbb{R}$ tout entier avec $f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k \geq 0$.

Appli 20 : Ainsi, $x \in \mathbb{R} \overset{\varphi}{\mapsto} \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Et $x \overset{\psi}{\mapsto} \varphi(1+x)\,\varphi(1-x) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

Contre-ex 21 : Si f est de classe C^{k+1} sur $I \setminus \{c\}$, de classe C^k sur I, et admet un DL_{k+1} en c, f n'est pas forcément de classe C^{k+1} sur I.
Pour $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^*)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ car $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x}) \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
f admet un DL_2 en 0 car $f(x) = o(x^2)$, mais f'' n'est pas prolongeable en 0.

Contre-ex 22 : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ f est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et f' se prolonge par 0 en 0, bien que f ne soit pas prolongeable continûment en 0.

2) Prolongement de solutions d'équations différentielles

[DEM]

Théorème 23 : (Théorème de Cauchy-Lipschitz)
Soit I un intervalle ouvert, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ continue, localement lipschitz par rapport à la 2e variable.
Alors il existe une unique solution maximale à l'équation différentielle :
$\begin{cases} y'(t) = F(t; y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ pour $(t_0, y_0) \in I \times U$ qui est définie sur un intervalle ouvert inclus dans I.

Théorème 24 : (Sortie de tout compact) [POM]
Soit $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ C^0 et localement lipschitz par rapport à la 2e variable, et $y : J \subset I \to U$ une solution maximale de l'équa diff associée à F.
Si $\beta = \sup(J) \in I$, alors y sort de tout compact de Ω au voisinage de β :
$\forall K \in \Omega$ compact, $\exists \varepsilon > 0$ tq $y(t) \notin K \ \forall t \in]\beta - \varepsilon; \beta[$. (Idem pour $\alpha = \inf(J)$)

Ex 25 : $F(t;x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Pour $\begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$, on trouve $x(t) = \sqrt{x_0^2 - 2t}$ sur $]-\infty; \frac{x_0^2}{2}[$.
Cette solution ne se prolonge pas à $\mathbb{R}$ tout entier et sort de tout compact de $\mathbb{R}_+^*$ pour $t \to \frac{x_0^2}{2}$.

Ex 26 : $F(t;x) = \sin(x)$, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
$x(t) \equiv 2k\pi$ est solution de $\begin{cases} x'(t) = \sin(x(t)) \\ x(0) = 2k\pi \end{cases}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour y sol non constante de $y'(t) = \sin(y(t))$,
$y(t) \in [y(0) - 2\pi; y(0) + 2\pi]$, donc y est bornée, donc y est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Appli 27 : Si F est définie sur $\mathbb{R} \times U$ avec $T > 0$ tq $\forall t \in \mathbb{R}, F(t+T; x) = F(t; x)$, $\forall x \in U$ et que l'on a une solution maximale de l'équa diff. dont son intervalle de définition J est de longueur $> T$, et qu'il existe $y_1 \in J$ tq $y_1 + T \in J$ et $f(y_1) = f(y_1 + T)$, alors f est T-périodique.

III) Prolongements sur des espaces vectoriels

Théorème 29 : (Hahn-Banach analytique)
Soit E un Banach de dim finie, V s-ev de E, et $f : V \to \mathbb{R}$ forme lin cont. [ROU]
Alors il existe $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ lin cont tq $\tilde{f}_{|V} = f$ et $\|\tilde{f}\|_E = \|f\|_V$.

Rem 30 : Si E est un espace de Hilbert, la notion d'orthogonal d'un s-ev donne ce résultat sans avoir besoin de dimension finie.

Appli 31 : Le dual de E, E', sépare les points : $\forall x, y \in E$, $x \neq y$, $\exists f \in E'$ tq $f(x) \neq f(y)$.

Appli 32 : Un s-ev F est dense dans E ssi $\forall f \in E'$, $f_{|F} \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ [BRE]

Appli 33 : $\forall x \in E, \exists f \in E'$ tq $\|f\| = \|x\|$ et $f(x) = \|x\|^2$. Ainsi, $\|x\| = \sup\limits_{\substack{\|g\| \leq 1 \\ g \in E'}} (|g(x)|)$

Appli 34 : (Théorème de Banach-Alaoglu)
Soit H un Hilbert. Toute suite bornée $(x_n)_n$ admet une extractrice qui est faiblement convergente.

II) Aspects analytiques

[OA]

1) Fonctions analytiques, prolongements analytiques

Déf 35 : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (ou intervalle de $\mathbb{R}$).
$f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique ssi f est de classe C^∞ sur Ω et si $\forall x \in \Omega$, f est égale à la somme de sa série de Taylor sur un voisinage de x.

Ex 36 : $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\} \mapsto \frac{1}{1-z}$ est analytique sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est analytique sur $D(0,R)$, où R est le rayon de convergence de la série.

[POM]

Théorème 37 : (zéros isolés)
Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) et f analytique sur Ω.
Si l'ensemble $\{z \in \Omega \text{ tq } f(z) = 0\}$ a un point d'accumulation dans Ω, alors $f \equiv 0$.

Ex 38 : $z \in \mathbb{D} \mapsto \sum z^n$ se prolonge analytiquement par $\frac{1}{1-z}$ à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Prop 39 : (Formule de la valeur moyenne) Soit Ω ouvert connexe, f analytique sur Ω, et $z_0 \in \Omega$. Alors, $\forall\, 0 < r < d(z_0; \partial\Omega)$, on a : $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)}\, dz$.

Prop 40 : (Prolongement en une singularité levable)
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f analytique sur un voisinage épointé de z_0, $V\setminus\{z_0\}$.
Si f est bornée sur $V\setminus\{z_0\}$, alors f se prolonge analytiquement en z_0.

Ex 41 : Soit f analytique sur Ω, ouvert connexe de $\mathbb{C}$.
Soit z_0 tq $f(z_0) = 0$. Alors $g : z \in \Omega \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{z - z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$ est analytique sur Ω.

Appli 42 : (lemme de Schwarz)
Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique, avec $f(0) = 0$. Alors $\forall z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |z|$, avec égalité en un z_0 ssi $f(z) \equiv e^{i\theta} \times z$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

[ZQ]

Appli 43 : (Formule des compléments et prolongement de Γ)
$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt$ est bien déf et analytique sur $\{z \text{ tq } \mathrm{Re}(z) > 0\}$.
$\forall z$ tq $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, on a : $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$. (Montrer la formule sur $]0,1[$ est nécessaire et suffisant)
Ainsi, $g : z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \times \frac{1}{\Gamma(1-z)}$ définie sur $\{z \text{ tq } \mathrm{Re}(z) < 1\} \setminus \{-n, n \in \mathbb{N}\}$ est analytique et coïncide avec Γ sur $\{z \text{ tq } 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. Cela permet de prolonger analytiquement Γ à $\mathbb{C}\setminus -\mathbb{N}$.

Prop + Ex 44 : Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f, g analytiques sur Ω tq $\exists z_0 \in \Omega$ vérifiant : $\forall n \geq 0$, $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$. Alors $f \equiv g$ sur Ω. Ainsi, $z \mapsto e^{-\frac{1}{z^2}}$ n'est pas analytique.

2) Problèmes de prolongement analytique

[POM]

Déf 45 : Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f analytique sur Ω.
Un point $z_0 \in \partial\Omega$ est dit régulier pour f s'il existe V ouvert contenant $\Omega \cup \{z_0\}$ et g analytique sur V tq $f \equiv g$ sur Ω.
z_0 est dit singulier sinon.

Contre-ex 46 : Pour $z \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ analytique sur $D(0,R)$, où R est le rayon de CV de la série entière, il y a au moins un point du disque de convergence qui est singulier.

Ex 47 : Pour $z_1, \dots, z_n \in \partial D(0,1)$, $f(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{z - z_i}$, $a_n = f^{(n)}(0)$, $z \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a $z_1, \dots, z_n$ comme points singuliers.

Prop 48 (lacunes de Hadamard) [DEV 2]
Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ suite croissante d'entiers tq $\exists \alpha > 1$ tq $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$ $\forall n \geq 0$.
Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tq la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$ est de rayon de convergence 1.
Alors, la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^{\lambda_n}$ n'a aucun point régulier sur $\partial D(0,1)$.

[ZQ]

Ex 49 : $z \mapsto \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2} z^{2^n}$ est analytique sur $D(0,1)$, se prolonge continument sur ∂D, mais n'admet aucun prolongement analytique.

Ex 50 : $\forall \alpha \in [-\pi; 0[$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$ peut être prolongée à $\mathbb{C}\setminus\{z \text{ tq } z = r e^{i\alpha}, r \geq 0\}$ par $\ln(z) = \ln(|z|) + i\theta$ pour $z = |z| e^{i\theta}$, $\theta \in]\alpha; \alpha + 2\pi[$.

Aucune de ces fonctions ne peut se prolonger analytiquement à $\mathbb{C}$ tout entier.
Pour $\Omega = \{z \text{ tq } z = r e^{i\theta}, r > 0, \theta \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]\}$, $\ln_{|\Omega}$ est analytique sur Ω et se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}\setminus[0; e^{i\alpha})$, pour tout $\alpha \in [-\pi; -\frac{\pi}{4}[$, mais n'admet pas de prolongement analytique à $\mathbb{C}$ tout entier.

AGNIEL Vidal
BERAUD Virien

Rombaldi ; Elements d'analyse réelle [ROM]
Pommellet ; Cours d'analyse [POM]
Zuily, Queffelec ; Analyse pour l'agrégation [ZQ]
Demailly ; Analyse numérique et équations différentielles [DEM]
Chambert-Loir, Fermigier, Maillot ; Exercices de mathématiques pour l'agrégation - Analyse 1 [CHA]
Rudin ; Analyse réelle et complexe [RUD]
Faraut ; Calcul intégral [FAR]
Gourdon ; Les maths en tête - Analyse [GOU]

Théorème de Plancherel

Objectif 1. *utiliser* le théorème de prolongement des applications uniformément continues *pour construire une* "transformée de Fourier" *sur* $L^2(\mathbb{R})$ *qui soit* isométrique.

Théorème 1. ***Plancherel***
Pour la norme $\|.\|_2$, $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$ *et on a pour tout* $f \in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2 \, \mathrm{d}t \ (\nabla)$$

On définit alors la transformation $\mathcal{P}$ *par* $\mathcal{P} : f \longmapsto \mathcal{P}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}$. *Ainsi,* (∇) *se réecrit de la manière suivante* $\|\mathcal{P}(f)\|_2 = \|f\|_2$ *et la tranformation de Fourier-Plancherel* $\mathcal{P}$ *se prolonge de manière* isométrique *à* $L^2(\mathbb{R})$.

[Rud] **Corollaire 1.** $\mathcal{P}\left(L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})\right)$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{P}$ *est un isométrie de de* $L^2(\mathbb{R})$.

Pour les besoins du théorème, on aura besoin du lemme suivant qui donne un exemple d'approximation de l'unité et qui est admis

[Far] **Lemme 1.** ***Approximation de l'unité***
Soit $\psi_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+(nx)^2}$ *on a alors* $\int_{\mathbb{R}} \psi_n(t)dt = 1$ *et* $\psi_n = \dfrac{1}{2\pi}\widehat{\phi_n}$ *où* $\phi_n(t) = e^{-\frac{|t|}{n}}$

Démonstration. :
Etape 1 : $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. La densité des fonctions continues à support compact dans $L^2(\mathbb{R})$ donne immédiatement la densité de $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet,

$$C_c(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \overline{C_c(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R}) \subset \overline{L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})} \subset \overline{L^2(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R}).$$

Etape 2 : Soit $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f * \widetilde{f}$. Calculons alors $\widehat{g}$. On a alors :

$$\widehat{g}(x) = \widehat{f * \widetilde{f}}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{\widetilde{f}}(x) = |\widehat{f}(x)|^2$$

En effet :

$$\widehat{\widetilde{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(t)e^{-itx}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-t)}e^{-itx}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(u)}e^{ixu}\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(u)}.\overline{e^{-ixu}}\,\mathrm{d}u = \overline{\widehat{f}(x)}$$

Méthode 1. *Exprimer* $g(0)$ *de deux manières différentes.*

Tout d'abord, par commutativité du produit de convolution on a $g(0) = (\widetilde{f} * f)(0)$ soit :

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(0-x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

Pour avoir, notre deuxième expression de $g(0)$, on va montrer que :

$$\lim_{n\mapsto\infty} \psi_n * g(0) = g(0) \text{ (propriété de } \psi_n \text{ comme approximation de l'unité).}$$

Comme $f, \widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$, $f*\widetilde{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et $f*\widetilde{f} \in C_0(\mathbb{R})$. Donc g est en particulier bornée sur $\mathbb{R}$ et étant continue en 0, pour ε fixé on a :

$$\exists \eta > 0,\ |x| \leq \eta \Longrightarrow |g(x) - g(0)| \leq \varepsilon.$$

En appliquant le lemme 1, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_n * g(0) - g(0) &= \int_{\mathbb{R}} \psi_n(0-x)g(x)\,\mathrm{d}x - g(0) \times \overbrace{\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x}^{=1} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)(g(x)-g(0))\,\mathrm{d}x \text{ car } \psi_n(x) = \psi_n(-x) \\
&= \int_{-\eta}^{\eta} \psi_n(x)(g(x)-g(0))\,\mathrm{d}x + \int_{|x|>\eta} \psi_n(x)(g(x)-g(0))\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

En passant en valeur absolue, on a :

$$\begin{aligned}
|\psi_n * g(0) - g(0)| &\leq \int_{-\eta}^{\eta} \psi_n(x)|g(x)-g(0)|\,\mathrm{d}x + \int_{|x|>\eta} \psi_n(x)|g(x)-g(0)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon \int_{-\eta}^{\eta} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|>\eta} \psi_n(x)|g(x)-g(0)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \tfrac{\varepsilon}{\pi}[\arctan(u)]_{-n\eta}^{n\eta} + \int_{|x|>\eta} \psi_n(x)|g(x)-g(0)|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Par imparité de arctan, on a :

$$\begin{aligned}
|\psi_n * g(0) - g(0)| &\leq \tfrac{\varepsilon}{\pi}[\arctan(u)]_{-n\eta}^{n\eta} + 2\|g\|_\infty \int_{|x|>\eta} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \tfrac{2\varepsilon}{\pi}\arctan(n\eta) + 2\|g\|_\infty \int_{|x|>\eta} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon + 2\|g\|_\infty \int_{|x|>\eta} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or $\int_{|x|>\eta} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|>\eta} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+(nx)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{|u|>n\eta} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$ soit :

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>\eta} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\left([\arctan(u)]_{-\infty}^{-n\eta} + [\arctan(u)]_{n\eta}^{+\infty}\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \times \left(\arctan(-n\eta) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan(n\eta)\right) \\
&= 1 - \frac{2}{\pi}\arctan(n\eta)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \int_{|x|>\eta} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (propriété de ψ_n comme approximation de l'unité), ce qui permet de conclure que $\lim\limits_{n\mapsto\infty} |\psi_n * g(0) - g(0)| = 0$.

Etape 3 : montrons que $\psi_n * g(0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2\phi_n(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le lemme 1, on a :

$$\psi_n * g(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)e^{-ixt}g(x)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x$$

Comme $g = f * \widetilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$ tout comme ϕ_n, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi_n(t)e^{-ixt}g(x)|\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\phi_n(t)g(x)|\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |\phi_n(t)|\,\mathrm{d}t\right)}_{\neq\infty}\,\mathrm{d}x < \infty
\end{aligned}$$

Le *théorème de Fubini-Tonelli* nous donne alors :

$$\psi_n * g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ixt}g(x)\,\mathrm{d}x\right)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2\phi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Etape 4 : on va appliquer le théorème de convergence monotone pour conclure. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{f}(t)|^2\phi_n(t) \leq |\widehat{f}(t)|^2\phi_{n+1}(t)$, avec $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \phi_n(t) = 1$, alors on a :

$$\lim_{n\mapsto\infty} \psi_n * g(0) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

avec $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \psi_n * g(0) = g(0)$. D'où : $\dfrac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$.

Conclusion : pour $f \in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, on a donc $\|\mathcal{P}(f)\|_2 = \|f\|_2$, on applique alors *le théorème de prolongement des applications uniformément continues* dont les hypothèses sont vérifiées :
- $L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Banach avec $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{P}$ est *linéaire continue* sur $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ donc *uniformément continue* sur $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ (par continuité de la transformation de Fourier $f \longmapsto \widehat{f}$ sur $L^1(\mathbb{R})$) .
- $\mathcal{P}$ est *isométrique* sur $L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$.

Ainsi, $\mathcal{P}$ se prolonge de *manière unique* sur $L^2(\mathbb{R})$ en une application *linéaire isométrique*. □

Démonstration. **Démonstration du lemme 1**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{t}{n}}e^{-ixt}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{n}}e^{-ixt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t(\frac{1}{n}-ix)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t(\frac{1}{n}+ix)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{t(\frac{1}{n}-ix)}}{\frac{1}{n}-ix}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-t(\frac{1}{n}+ix)}}{-(\frac{1}{n}+ix)}\right]_0^{\infty}
\end{aligned}$$

Or, $|e^{t(\frac{1}{n}-ix)}| = e^{\frac{t}{n}}$, $|e^{-t(\frac{1}{n}+ix)}| = e^{-\frac{t}{n}} \Longrightarrow \lim\limits_{t\mapsto-\infty} e^{t(\frac{1}{n}-ix)} = \lim\limits_{t\mapsto+\infty} e^{-t(\frac{1}{n}+ix)} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = & \frac{1}{2\pi}(\tfrac{1}{n}-ix)^{-1} + \frac{1}{2\pi}(\tfrac{1}{n}+ix)^{-1} \\
= & \frac{1}{2\pi}\frac{(\frac{1}{n}+ix)+(\frac{1}{n}-ix)}{(\frac{1}{n}-ix)(\frac{1}{n}+ix)} \\
= & \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}^2+x^2} \\
= & \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+(nx)^2}
\end{aligned}$$

Enfin, le changement de variable $u = nx$ nous donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{n}{1+(nx)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}[\arctan(u)]_{-\infty}^{\infty} = 1$$

□

Rappel 1. *La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ est donnée par :*

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}),\ \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

[Skand]

Rappel 2. *Soient (X,d), (X',d') métriques complets, $D \subset X$ dense dans X et $f : D \longrightarrow (X',d')$ uniformément continue. Il existe alors une unique application $\overline{f}$ définie sur X prolongeant f et $\overline{f}$ est elle aussi uniformément continue. De plus, si f est lipschitzienne de rapport k ou isométrique, il en est de même pour $\overline{f}$.*

[Rudin]

Rappel 3. *Avec les hypothèses précédentes, si $f(D)$ est aussi dense dans X' alors son prolongement $\overline{f}$ est une isométrie, ie envoie isométriquement X sur X' tout entier : $\overline{f}(X) = X'$.*

Rappel 4. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est continue et tend vers 0 à l'infini ie $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, en particulier, elle est* bornée. *De plus, $f \longmapsto \widehat{f}$ est linéaire (linéarité de l'intégrale), avec*

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 \Longrightarrow \textit{elle est continue de } L^1(\mathbb{R}) \textit{ dans } C_0(\mathbb{R})$$

Elle est donc uniformément continue, *ces deux notions* étant équivalentes *dans le cadre des applications linéaires.*

Rappel 5. *Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R})$. Notant $\widehat{f},\widehat{g}$ leurs transformées de Fourier respectives et $*$ la loi du produit de convolution, on a $\widehat{f*g} = \widehat{f}.\widehat{g}$*

Rappel 6. *Si f et g sont dans $L^2(\mathbb{R})$, le produit de convolution $f*g$ est définie en tout point et alors $f*g \in C_0(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_2\|g\|_2$.*

Rappel 7. *Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable et la fonction $f*g$ définie presque partout par :*

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

est intégrable *et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \times \|g\|_1$.*

<u>**Références :**</u> Faraut : Calcul intégral et Objectif Agregation pour des rappels sur la convolution.

<u>**Leçons concernées :**</u>
- Leçon 207
- Leçon 240

Théorème des lacunes d'Hadamard

ref : ZQ

Définition: Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Un point du cercle $\mathbb{U}$ est dit *régulier* si f admet un prolongement analytique sur un voisinage de ce point, il est dit *singulier* sinon.

La première remarque est que tous les points du bord ne peuvent être réguliers, sinon f aurait un prolongement analytique sur un disque de rayon $1+\epsilon$ (par compacité du cercle) et d'après la formule de Cauchy, f étant holomorphe admet un développement en série entière $\sum b_n z^n$ de rayon $1+\epsilon$. (on utilise ici holomorphe implique analytique avec DSE sur le plus grand disque possible). Par unicité du développement, $a_n = b_n$ est la série $\sum a_n z^n$ est de rayon > 1, contradiction.

$d(\overline{D}, \Omega^c) > 0$

On donne maintenant une condition suffisante pour que tous les points du bord soient singuliers.

Théorème 42.1 (Lacunes d'Hadamard) *Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers > 0 tels que $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$. Soit une série entière $\sum a_n z^{\lambda_n}$ de rayon de convergence 1. Alors tous les points du bord sont singuliers.*

Preuve. idée : la série entière est de rayon 1 bien qu'elle soit lacunaire, c'est donc que ses coefficients non nuls sont trop gros pour que la fonction s'étende analytiquement. On va donc supposer par l'absurde qu'un point est régulier (1) et on va montrer qu'alors le rayon doit être strictement plus grand que 1, contradiction.

Si on montre que 1 est singulier, alors pour tout $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$, la série $\sum a_n e^{i\theta\lambda_n} z^{\lambda_n}$ est toujours de rayon 1 car la taille des coefficients n'a pas changé et toujours lacunaire, donc 1 est singulier pour cette série, c'est-à-dire $e^{i\theta}$ est singulier pour la série initiale $\sum a_n z^{\lambda_n}$.

Supposons donc que f admet un prolongement analytique sur l'ouvert $\Omega = D \cup D(1, \eta)$.

Comme $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq \alpha > 1$, on peut trouver $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{p+1}{p} < \alpha$ et donc $p\lambda_{n+1} > (p+1)\lambda_n$. $\Rightarrow p\lambda_n > (p+1)\lambda_{n-1}$

On introduit alors la fonction

$$\varphi(z) = \frac{z^{p+1} + z^p}{2}$$

qui a deux vertus : elle envoie un disque $D(0, 1+\epsilon)$ dans Ω, et $\varphi(z)^{\lambda_n}$ et $\varphi(z)^{\lambda_{n+1}}$ sont des polynômes de degrés disjoints.

En effet, si $z \in \overline{D}\{1\}$, $\frac{|z^p(z+1)|}{2} < 1$ et $\varphi(1) = 1$. Donc $\varphi(\overline{D}) \subset \Omega$ mais comme $\overline{D}$ est compact, Ω ouvert et φ continue, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $\varphi(D(0, 1+\epsilon)) \subset \Omega$.

La fonction $g \circ \varphi$ est donc holomorphe sur $D(0, 1+\epsilon)$ comme composée de deux fonctions holomorphes. Par la formule de Cauchy, $g \circ \varphi$ admet un développement en série entière centré en 0 de rayon $\geq 1+\epsilon$:

$$g \circ \varphi(z) = \sum b_n z^n$$

Par unicité du développement en série entière et comme $\varphi(z)^{\lambda_n} = \frac{1}{2^{\lambda_n}}(z^{p+1}+z^p)^{\lambda_n} = \frac{1}{2^{\lambda_n}}\sum_{k=0}^{\lambda_n}\binom{\lambda_n}{k} z^{(p+1)k} z^{p(\lambda_n-k)}$

$\Rightarrow \varphi(z)^{\lambda_n} = \sum_{k=0}^{\lambda_n}\frac{\binom{\lambda_n}{k}}{2^{\lambda_n}} z^{\lambda_n p+k}$, et $p\lambda_n \leq p\lambda_n + k \leq (p+1)\lambda_n$, on peut écrire, pour $n \geq 0$ et $z \in D(0;1+\epsilon)$:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{z^p + z^{p+1}}{2}\right)^{\lambda_n} = \sum_{n=0}^{(p+1)\lambda_N} b_n z^n$$

En prenant $z \in]1, 1+\epsilon[$, et en faisaint tendre N vers l'infini, on aboutit à une contradiction :

– Le premier membre diverge grossièrement car $|\frac{z^p+z^{p+1}}{2}| > 1$ et la série $\sum a_n z^{\lambda_n}$ est de rayon 1.

– Le second membre converge car $|\frac{z^p+z^{p+1}}{2}| < (1+\epsilon)$ et la série $\sum b_n z^n$ est de rayon $\geq 1+\epsilon$.

Leçons concernées : prolongement de fonction, séries entières, fonctions holomorphes. □