207 — Prolongements de fonctions. Exemples et applications.

I) Prolongement et topologie.

I-A) Prolongement local.

Prop. 1 : Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) espaces métriques, $a \in X$, $f : X \setminus \{a\} \to Y$ continue. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, alors f est prolongeable par continuité en a avec $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Ex 2 : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable par 1 en 0.

C-ex 3 : $f(x) = \ln(x)$ n'est pas prolongeable en 0.

Prop. 4 : (Prolongement des applications uniformément continues).
Soient (X, d_X) métrique et (Y, d_Y) complet. Soient $D \subset X$ dense dans X et $f : D \to Y$ uniformément continue. Il existe une unique fonction $g : X \to Y$ telle que : $\begin{cases} g|_D = f \\ g \text{ est uniformément continue.} \end{cases}$

Ex 5 : L'injection canonique $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue et se prolonge en l'identité.

C-ex 6 : $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas prolongeable en 0.

App 7 : Prolongement des applications linéaires continues $E \to F$ avec E evn et F Banach.

Prop. 8 : (Prolongement C^1 sur $\mathbb{R}$).
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue (avec $I \subset \mathbb{R}$) et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, $a \in I$. Si $\ell = \lim_{x \to a} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\ell = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Si de plus $\ell \neq \pm\infty$, f est dérivable en a et f' est continue en a.

Coro 9 : (Prolongement C^k).
Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, C^k sur $I \setminus \{a\}$ telle que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \leq k$, $\lim_{x \to a} f^{(p)}(x) \in \mathbb{R}$.
Alors f est C^k sur I.

Ex 10 : La fonction $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases}$

est prolongeable en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

C-ex 11 : $f(x) = x \ln(|x|)$ est prolongeable par continuité en 0, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, mais pas dérivable en 0.

I-B) Prolongement global

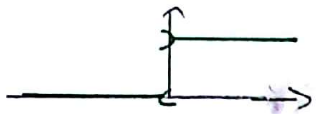
Thm 12 : (Principe de recollement) Soient $(X, \mathcal{O}_1)$ et $(Y, \mathcal{O}_2)$ deux espaces topologiques, $(A_i)_{i \in I}$ tels que $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications continues $A_i \to Y$. Alors si les $(A_i)_{i \in I}$ sont ouverts, ou si les $(A_i)_{i \in I}$ sont fermés avec I fini, il existe $f : X \to Y$ continue qui prolonge les $(f_i)_{i \in I}$: $\forall i \in I$, $f|_{A_i} = f_i$.

C-ex 13 : $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est continue sur chaque singleton de $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Lem 14: (Lemme d'Urysohn) Soit (X,d) métrique. Si $A, B \subset X$ sont fermés et disjoints, il existe $f : X \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$f|_A = 0,\quad f|_B = 1,\quad 0 \leq f \leq 1.$$

C-ex 15: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

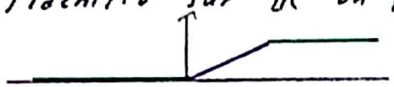


f n'est pas prolongeable en 0.

Thm 16: (Tietze) Soit (X,d) métrique, $Y \subset X$ fermé, $g_0 : Y \to \mathbb{R}$ continue, alors g_0 admet un prolongement continu $f_0 : X \to \mathbb{R}$ DEV1

App. 17: Construction de partition de l'unité.

Rem 18: Il n'y a pas unicité dans Tietze. Par exemple $Id|_{[0,1]}$ peut être prolongée par l'identité sur $\mathbb{R}$ ou par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$



II) Prolongement analytique.

Dans cette partie, $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe non vide

II.A) Théorèmes généraux.

Thm 19: Soit $f \in H(\Omega)$, $Z(f) = \{z \in \Omega, f(z) = 0\}$.
- Ou bien $Z(f) = \Omega$.
- ou bien $Z(f)$ n'a aucun point d'accumulation dans Ω.

Coro 20: Soient $f, g \in H(\Omega)$. Si $\{z \in \Omega, f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans Ω, $f = g$.

Déf 21: Si $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, on dit que f a une singularité isolée en a. Si f peut être prolongée holomorphiquement en a, la singularité est dite artificielle.

Thm 22: Soit $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Si f est bornée sur $D(a,r) \setminus \{a\}$, alors a est une singularité artificielle.

C-ex 23: $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'est pas prolongeable en 0.

Déf 24: Soit D un disque ouvert, $f \in H(D)$, $\beta \in \partial D$.
- S'il existe un disque D_1 de centre β et $g \in H(D_1)$ telle que $f(z) = g(z)$ pour $z \in D \cap D_1$, β est dit régulier.
- Sinon, β est dit singulier.

Rem 25: L'ensemble des points régulier est ouvert.

Thm 26: Soit $f \in H(D(0,1))$ développable en série entière sur $D(0,1)$. Alors f a au moins un point singulier si le rayon de convergence de la série est 1.

Ex 27: $z \mapsto \frac{1}{1+z}$ a -1 comme point singulier.

Ex 28: Si $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$ alors f est holomorphe sur $D(0,1)$ et tous les points de $C(0,1)$ (le cercle) sont singuliers.

Thm 29: Soit $L \subset \Omega$ une droite ou un arc de cercle. Si $\Omega \setminus L = \Omega_1 \cap \Omega_2$ avec Ω_1, Ω_2 ouverts et connexes, si f est continue sur Ω et holomorphe sur Ω_1 et Ω_2, f est holomorphe sur Ω.

II.B) Fonctions particulières.

Ex 30 : La fonction $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Ex 31 : La fonction $\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Ex 32 : La fonction $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{z-1} e^{-t} dt$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$

App 33 : (Stirling continu)

$$\Gamma(x) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

DEV 2

III) Prolongement et Hahn-Banach (E sera un $\mathbb{R}$-ev.)

III.A) Hahn-Banach et ses corollaires immédiats.

Thm 34 : (Hahn-Banach analytique).

Soit $p : E \to \mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} p(\lambda x) = \lambda p(x) & \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E \\ p(x+y) \leq p(x) + p(y) & \forall x, y \in E. \end{cases}$

Soit $G \subset E$ un sev et $g \in G'$ telle que :

$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$.

Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g telle que

$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Coro 35 : Soit $G \subset E$ un sev et $g \in G'$ avec $\|g\| = \sup_{x \in G} |g(x)|$

Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et $\|f\| = \|g\|$.

Coro 36 : $\forall x_0 \in E, \exists f_0 \in E', \begin{cases} \|f_0\| = \|x_0\| \\ \langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2 = f_0(x_0) \end{cases}$

Coro 37 : $\forall x, y \in E, x \neq y, \exists f \in E', f(x) \neq f(y)$.

Coro 38 : $\forall x \in E, \|x\| = \sup_{f \in E'} |f(x)| = \max_{f \in E'} |f(x)|$.

III.B) Prolongement de la transformée de Fourier.

Def 39 : Soit $f \in \mathcal{S}$ (ensemble de Schwarz sur $\mathbb{R}$).
On définit la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$ par :
$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$.

Rem 40 : Cette définition se fait sur tout $L^1(\mathbb{R})$.

Ex 41 : $f(x) = e^{-|x|} \in \mathcal{S}$, $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$

Thm 42 : (Plancherel) Pour tout $f \in L^2$, on peut associer $\hat{f} \in L^2$ telle que :

i) si $f \in L^1 \cap L^2$, $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$.

ii) $\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$

iii) $f \to \hat{f}$ est un isomorphisme de L^2 sur L^2.

Thm 43 : $\mathcal{F}$ est linéaire bijective et continue de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$.

Thm-Déf 44 : Si $T \in \mathcal{S}'$, $\mathcal{F}(T) = \hat{T}$ est la distribution tempérée telle que : $\forall \varphi \in \mathcal{S}, \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$.

Thm 45 : $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ est linéaire bijective continue.

Thm 46 : La transformation de Fourier $\hat{T}$ sur $\mathcal{S}'$ coïncide avec celle dans $\mathcal{S}$ si $T \in \mathcal{S}$.

Thm 47 : Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\hat{T}$ est la fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ donnée par : $\hat{T}(\xi) = \langle T, x \mapsto e^{-ix\xi} \rangle$.
De plus, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\hat{T}^{(l)}(\xi)| \leq C_l (1+|\xi|^k)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \mathbb{R}$.

Ex 48 :

$\hat{\delta_0} = 1$ et $\hat{1} = (2\pi)\delta_0$ (au sens des distributions tempérées)