207

Prolongement de fonctions : exemples et applications

def 1 : Soient X et Y deux ensembles et $F \subset X$. Si on a $f : F \to Y$ on dit que $g : X \to Y$ est un prolongement de f si $g_{|F} = f$

I. Introduction aux problèmes de prolongement

1. Prolongement par continuité

prop 2 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ continue est prolongeable par continuité en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x)$ existe et est finie.

ex 3 : $f_1 : x \neq 0 \mapsto \sin(x)/x$ et $f_2 : x \neq 0 \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ sont prolongeables par continuité en 0.

C.ex 4 : $f_3 : x \neq 0 \mapsto \sin(1/x)$ n'est pas prolongeable.

rmq 5 on peut procéder par développement limité.

2. Vers plus de régularité

theo 6 (de prolongement de classe C^k) Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ de classe C^k. Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que $\forall m \in [\![0,k]\!]$ $\lim\limits_{x \to a} f^{(m)}(x) = \lambda_m$, alors f se prolonge en une fonction de classe C^k sur I avec $\forall m \in [\![0,k]\!]$ $f^{(m)}(a) = \lambda_m$

ex 7 Pour f_1 et f_2 on a des prolongements C^∞

C.ex 8 $h : x \neq 0 \mapsto x^2 \sin(1/x)$ admet un prolongement continu dérivable mais pas C^1 en $x = 0$

app 9 (Fonctions plateaux) Pour tout U ouvert de $\mathbb{R}$, $K \subset U$ compact, il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que
- $\mathrm{supp}(f) \subset U$
- $f_{|K} \equiv 1$
- $0 \leqslant f \leqslant 1$

theo 10 (de Borel) Soit $(a_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\forall m \in \mathbb{N}$ $f^{(m)}(0) = a_m$

app 11 Soient $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ alors, il existe $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ avec $\tilde{f}_{|[a,b]} = f$.

3. Solutions d'équations différentielles

Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : I \times U \to \mathbb{R}$ on considère ici (E) : $y' = f(t, y)$.

prop 12 Soient $a < b < c \in \mathbb{R}$, $y_1 : (a,b) \to \mathbb{R}$ et $y_2 : (b,c) \to \mathbb{R}$ deux solutions de (E). Si f est continue et $\lim\limits_{x \to b^-} y_1(x) = \lim\limits_{x \to b^+} y_2(x)$ alors on a une solution de (E) sur (a,c) donnée par

$$y : (a,c) \to \mathbb{R}$$
$$x < b \mapsto y_1(x)$$
$$x > b \mapsto y_2(x)$$
$$b \mapsto \lim_{x \to b} y(x)$$

ex 13 $y'(t) = \sin(|t|)$ admet $y \begin{cases} t \leqslant 0 \mapsto \cos(t) - 1 \\ t \geqslant 0 \mapsto 1 - \cos(t) \end{cases}$ comme solution sur $\mathbb{R}$.

theo 14 : (Cauchy-Lipschitz). Si f est localement lipschitzienne par rapport à y alors tout problème de Cauchy pour (E) admet une unique solution maximale sur un ouvert (T_-, T_+).

theo 15 (des bouts) avec les mêmes hypothèses on a $T_+ = \sup I$ ou $\lim_{T_+} |y| = +\infty$ et de même en T_-

rmq 16 Si on a une solution bornée sur $J \subsetneq I$ alors elle admet un prolongement.

app 17 Si f est bornée alors la solution est globale

II. Prolongements en analyse fonctionnelle

1. Utilisation de la densité

prop 18 Soient X et Y deux espaces topologiques séparés. Si $f : X \to Y$ et $g : X \to Y$ sont continues et coïncident sur une partie dense de X alors $f = g$.

app 19 $\forall A, M \in M_n(\mathbb{R})$, $d_A \det(M) = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{com}(A).M)$

app 20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x.y) = f(x)f(y)$ et $f(x+y) = f(x)+f(y)$ alors $f = 0$ ou $f = id$.

app 21 (Théorème de Cayley Hamilton) $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $\chi_A(A) = 0$

def 22 Soient (E,d) et (E',d') métriques. $f : E \to E'$ est uniformément continue (UC) si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in E$ $d(x,y) < \eta(\varepsilon) \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

ex 23 les applications linéaires continues ou lipschitziennes sont UC.

theo 24 (de prolongement des A UC) Soient (E,d) et (E',d') métriques, E' complet. Si D est dense dans E et $f : D \to E'$ est UC alors f admet un unique prolongement UC à E

app 25. (théo de Plancherel). La transformée de Fourier se prolonge continument à L^2 et le prolongement est une isométrie.

app 26 Soit $N : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ telle que

DEV 1

- $\forall u \in \mathbb{Z}^2$, $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- $\forall u \in \mathbb{Z}^2, \forall \lambda \in \mathbb{Z}$, $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$
- $\forall u, v \in \mathbb{Z}^2$ $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$

N se prolonge de manière unique en une norme sur $\mathbb{R}^2$

2- Applications contrôlées

theo 27 (de Tietze - Urysohn). Soit (X,d) métrique et Y un fermé de X. Soit $f : Y \to \mathbb{R}$ continue bornée. f admet un prolongement $F : X \to \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{x \in X} F(x) = \sup_{x \in Y} f(x) \qquad \inf_{x \in X} F(x) = \inf_{x \in Y} f(x).$$

app 28 Soient A, B deux fermés disjoints d'un espace métrique, il existe $f : X \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|A} = 0$ et $f_{|B} = 1$

theo 29 (Hahn Banach Analytique) Soit E un $\mathbb{R}$-evn de dimension finie et p une semi-norme sur E. Si u est une forme linéaire sur F SEV de E, telle que $\forall x \in F$ $u(x) \leq p(x)$ alors u se prolonge en une forme linéaire v sur E qui vérifie : $\forall x \in E$ $v(x) \leq p(x)$

rmq 30 On admettra ce résultat en dimension infinie.

cor 31 Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-evn (de dimension finie) et F un sev de E. Si u est une forme linéaire continue sur F alors elle se prolonge en une forme linéaire sur E de même norme d'opérateur.

III Fonctions de la variable complexe

1. Prolongement analytique

rap 32 Soit U ouvert de $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U. On a équivalence entre :

- $f \in \mathcal{H}(U)$
- f est développable en série entière au voisinage de tout point de U.

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière, son rayon de convergence (RCV) est

$$R = \sup\{r > 0 : \forall z \in \mathbb{C} : |z| = r \ \sum a_n z^n \text{ converge}\}$$

Soit maintenant Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$

prop 33. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si il existe $a \in \Omega$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$ alors $f = 0$ sur Ω.

théo 34 (principe des zéros isolés). Si $f \neq 0$, l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f n'a pas de point d'accumulation. (où $f \in \mathcal{H}(\Omega)$)

cor 35 (principe de prolongement analytique) Si $f = g$ sur un ensemble ayant des points d'accumulation alors $f = g$ (pour $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$)

rmq 36 Si une fonction définie sur un ensemble ayant des points d'accumulation admet un prolongement holomorphe à un ouvert connexe alors il est unique.

app 37 exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se prolonge à $\mathbb{C}$

app 38 Si $F \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ alors $\hat{F}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

cor 39 Si $F \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ avec $\hat{F}$ à support compact alors $F = 0$

2. Application aux fonctions spéciales

def 40 (Γ d'Euler) Γ $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

prop 41 Γ est bien définie et holomorphe.

theo 42 Γ se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$

$\frac{1}{\Gamma}$ se prolonge de manière unique en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

def 43. (ζ de Riemann) ζ : $s \in \{\operatorname{Re} s > 1\} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$

prop 44 ζ est bien définie et holomorphe.

theo 45 : ζ admet un unique prolongement holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

3. Prolongement au bord

def 46 : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, U est à bord lisse si ∂U peut être paramétrée par une courbe fermée injective continue.

theo 47 (de Carathéodory) Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{C}$ simplement connexes, à bords lisses, d'adhérence compacte. Tout biholomorphisme de Ω sur Ω' se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{\Omega}$ sur $\bar{\Omega}'$.

app 48 Si Ω est biholomorphe à $\mathbb{D}$ alors $\bar{\Omega}$ est homéomorphe à $\bar{\mathbb{D}}$. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

def 49 Soit $f = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $r > 0$. $z \in \partial D(0,r)$ est régulier si f admet un prolongement holomorphe au voisinage de z. Sinon il est singulier.

On dit que $\partial D(0,r)$ est une coupure pour f si tous ses points sont singuliers.

exp 50 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ est de RCV 1 et 1 est le seul point singulier.

$\partial \mathbb{D}$ est coupure pour $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.

lem 51 Si $\sum a_n z^n$ est de RCV $0 < r < \infty$ alors il existe au moins un point singulier.

theo 52 (De Steinhaus). Soit $\sum a_n z^n$ de RCV égal à 1. Soit $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires complexes indépendantes de loi uniforme sur le cercle unité. Alors le cercle unité $\mathbb{S}^1$ est presque sûrement une coupure pour :

$$\sum a_n W_n z^n$$

DEV 2.

Bibliographie

Rouvière : Petit guide calcul différentiel
Gourdon : Analyse
Berthelin : Equations différentielles
FGN : Oraux X-ENS, analyse 3. (DEV 1).
Tisseron : Introduction aux espaces fonctionnels.
Amar-Matheron : Analyse complexe

Autres développement possibles.

- Théorème de Tietze-Urysohn (Gourdon)
- Prolongement de ζ (Amar Matheron)
- Théorème de carathéodory (Amar Matheron).
- Théorème de Plancherel.

Autre partie possible / prolongement

Prolongement en probabilité

1 - Vocabulaire

- def : tribu, tribu engendrée, espace mesurable
- exp : $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\sigma(A) = \{\emptyset, X, A, A^c\}$.
- def : mesure
- exp : comptage - lebesgue
- def : classe monotone, CM engendrée
- rq : tribu $\Rightarrow$ CM.

2 - Caractérisation des lois de $\mathbb{P}$.

- prop : M classe monotone contenant X et stable par $\cap$ finies $\Rightarrow$ tribu
- lem : (des classes monotones).
- cor : $\boxed{\text{Si } \mu \text{ et } \nu \text{ sont deux mesures sur un espace mesurable } (X, \mathcal{A}). \text{ Soit } \mathcal{C} \text{ une classe de parties qui contient } X \text{ et stable par intersections finies et telle que } \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}. \text{ Si } \forall C \in \mathcal{C}\ \mu(C) = \nu(C) \text{ alors } \mu = \nu.}$
- rq : Comme le th de prolongement analytique cela s'interprète en terme d'unicité de prolongement.
- app : En admettant l'existence on a l'unicité de la mesure de Lebesgue.
- app : $\boxed{\text{Soient } X \text{ et } Y \text{ deux variables aléatoires réelles si } \forall t \in \mathbb{R}\ P(X \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq t) \text{ alors } X \sim Y}$