208

Espaces vectoriels normés. Applications linéaires continues

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F K-espaces vectoriels.

I Espaces vectoriels normés

1) Définitions et premières propriétés

Déf : Un espace vectoriel E est normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$

Rq : $d(x,y) = \|x-y\|$ est une distance qui fait de E un espace métrique.

Déf : Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont équivalentes si $\exists a > 0, \exists b > 0, \forall x \in E \quad a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1$.

Ex :
- Sur $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes
- $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes sur $C^0([0,1])$.

2) Continuité des applications linéaires

Th : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur E
(ii) f est continue en 0
(iii) il existe $M > 0$ tel que $\|f(x)\| \leqslant M\|x\|, \forall x \in E$
(iv) f est lipschitzienne
(v) f est uniformément continue.

Déf : L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}_c(E,F)$ et est muni de la norme : $\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F) \quad |||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\|$

Ce qui fait de $\mathcal{L}_c(E,F)$ un espace vectoriel normé.

Rq : $|||f|||$ est le plus petit réel positif M tel que $\|f(x)\| \leqslant M\|x\|, \forall x \in E$.

Prop : Soient E, F, G trois e.v.n, $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|||g \circ f||| \leqslant |||g||| \cdot |||f|||$

3) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Th : En dimension finie toute les normes sont équivalent

Cor : Toute application linéaire d'un e.v.n de dimensio finie dans un e.v.n est continue.

C.ex : l'application linéaire $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \longmapsto P'$ où $\mathbb{R}[X]$ est l'e.v munit de $\|\sum a_i X^i\| = \sup |a_i|$ n'est pas continue.

Cor : Tout e.v.n de dimension finie est complet.

C.ex : Tout e.v.n à base dénombrable n'est pas complet

Th (Riesz) : (E e.v.n de dimension finie) $\Longleftrightarrow$ ($B_f(0,1)$ est compacte)

II Espaces de Banach

Déf : Un e.v.n est un espace de Banach s'il est complet.

Th : Si F est un espace de Banach, l'e.v.n $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

1) Formes linéaires continues dans un espace de Banach

Soit E un espace de Banach.

Déf : On appelle dual de E, noté E', l'espace des formes linéaires continues sur E

Th (Hahn-Banach) Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ linéaire continue. Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que $\|f\|_{E'} = \|g\|$

2) Théorème de Baire et applications

Déf : Un espace vectoriel normé E est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E ou de manière équivalente si toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides de E est d'intérieur vide dans E.

Th (Baire) Tout espace de Banach est un espace de Baire.

Th (Application ouverte) Soient E, F deux espaces de Banach, $T : E \to F$ linéaire continue surjective. Alors T est une application ouverte.

Cor (Th de Banach) Soit $T : E \to F$ linéaire continue bijective. Alors T^{-1} est continue.

DEV

Th (Banach-Steinhaus) Soient E un espace de Banach et F un e.v.n. Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$. Si pour tout $x \in E$, il existe $M > 0$ tq $\sup_{f \in H} \|f(x)\| \leq M$, alors $(|||f|||)_{f \in H}$ est borné.

Csq : Soit (f_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F convergeant simplement vers f. Alors f est une application linéaire continue.

Csq : Il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.

III Espaces de Hilbert [HL]

Déf : Le couple constitué d'un espace E et d'un produit scalaire sur E est appelé espace préhilbertien.

Prop : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Pour tout $x, y \in E$, $|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$

Cor : Soit E comme dans la proposition précédente. Alors $\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2}$ définit une norme sur E.

Prop : Si x et y sont deux éléments d'un espace préhilbertien, alors :

- $\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- si $\langle x,y \rangle = 0$, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Déf : Un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé espace de Hilbert.

Ex : • Tout espace préhilbertien de dimension finie
• $\ell^2(I) = \{ (x_i)_{i \in I} \in K^I, \sum_{i \in I} x_i < \infty \}$
• $L^2(\Omega)$ muni de $\langle u,v \rangle = \int_\Omega u(x) \overline{v(x)} dx$.

Soit H un espace de Hilbert

1) Théorèmes de projection [HL]

Th : Soit C un convexe fermé non vide de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que
$$\|x - y\| = d(x, C)$$
Ce point est appelé projection de x sur C caractérisé par : $y \in C$ et $\forall z \in C \; \mathrm{Re} \langle x-y, z-y \rangle \leq 0$

Prop : Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E. Alors P_F (la projection de E sur F) est un opérateur linéaire de E sur F. Si $x \in E$, $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in E$ tel que : $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$

Déf : Dans le cas précédent, P_F est appelé projecteur orthogonal sur F.

Cor : Pour tout sous-espace vectoriel F de E

$$E = \overline{F} \oplus F^{\perp}$$

En particulier F est dense ssi $F^{\perp} = \{0\}$

2) Théorème de représentation de Riesz [Bre]

Th : Etant donné $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que
$$\varphi(v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Déf : On dit qu'une forme bilinéaire $a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est coercive s'il existe $\alpha > 0$ telle que
$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in H$$

DEV

Th (Stampacchia) Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit K un convexe fermé nonvide. Etant donnée $\varphi \in H'$, il existe $u \in K$ unique tel que
$$a(u, v-u) \geq \varphi(v-u) \quad \forall v \in K$$
Si a est symétrique, on a de plus :
$$u \in K, \ \frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right\}$$

Cor (Lax-Milgram) Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Pour tout $\varphi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que $a(u,v) = \varphi(v) \ \forall v \in H$.
De plus, si a est symétrique, u est caractérisé par la propriété :
$$u \in H, \ \frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right\}.$$

3) Bases hilbertiennes [HL] E préhilbertien.

Déf : Une famille orthonormale totale de E est appelée base hilbertienne de E.

Ex : $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$ est une base hilbertienne de $C^{\mathbb{C}}_{2\pi}$, fonctions périodiques continues de période 2π.

Th (Bessel-Parseval) Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de E. On a équivalence entre :
i) la famille $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de E
ii) $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$
iii) $\forall x, y \in E \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$.

Rq : Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de E, l'application de E dans $\ell^2(I)$ définie par $x \longmapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ est une isométrie linéaire. Elle est surjective ssi H est un Hilbert.

Th : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base hilbertienne de E. Alors :
$$\forall x \in E \quad x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Ex : On considère $C^{\mathbb{C}}_{2\pi}$ et sa base hilbertienne $e_n(x) = e^{inx}$.
Si $f \in C^{\mathbb{C}}_{2\pi}$, on pose $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$.
La suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est la suite des coefficients de Fourier de f.
On a $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$.

Prop : (Procédé d'orthonormalisation de Schmidt)
Soit $N \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $(f_n)_{0 \leq n < N}$ une famille libre de E. Il existe une famille orthonormale $(e_n)_{0 \leq n < N}$ de E telle que $\forall n < N$ $(e_p)_{0 \leq p \leq n}$ et $(f_p)_{0 \leq p \leq n}$ engendrent le même sous-espace vectoriel de E.