208 : EVN

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I/ Généralités

Déf 1.1 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\|\cdot\|$ est une norme sur E ssi :

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (séparation)

(ii) $\forall x, y \in E$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

(iii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (homogénéité).

Déf 1.2 Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme est appelé un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (evn). C'est un espace métrique avec $d(x,y) = \|x-y\|$ muni de la topologie associée à d.

Exemples 1.3

- $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$ est un evn pour $\|\cdot\| : \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \mapsto \max_{i \in [\![0,d]\!]} |a_i|$
- $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est un evn ...

Prop 1.4 : critère de continuité.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-evn, $f \in \mathcal{L}(E,F)$. alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur E (noté $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$)

(ii) f est continue en 0

(iii) f est bornée sur la sphère unité de E

(iv) $\exists M > 0$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq M \|x\|$

(v) f est lipschitzienne

Prop-déf 1.5 :

$\mathcal{L}_c(E,F)$ est un evn, muni de la norme $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$

Prop 1.6 :

Si $\dim E < \infty$, $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$

Contre exemple 1.7

Sur $(\mathbb{K}[X], \|\ \|)$, $P \mapsto P'$ n'est pas continue.

Déf 1.8 : Équivalence des normes.

Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites équivalentes ssi : $\exists \alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in E$,

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Remarque 1.9 :

deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie.

Prop 1.10 :

Si $\dim E < \infty$, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Remarque 1.11 :

En dimension ∞, la notion de continuité d'une application linéaire dépend de la norme choisie.

Exemple 1.12 :

sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, l'application : $f \mapsto f(0)$ est :

- continue pour $\|\ \|_\infty$: $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$
- non continue pour $\|\ \|_1$, avec $f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt & \text{si } t \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

$f_n(0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, mais $\|f_n\|_1 \xrightarrow[n]{} 0$

Théorème 1.13 : théorème de Riesz

Soit E un evn, $B = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

Alors $[\dim E < \infty] \iff [B$ est compacte$]$

Prop 1.14

les parties compactes d'un evn de dimension finie sont exactement les fermés bornés.

Théorème 1-15 (Hahn-Banach)

E K-evn, F sous espace vectoriel de E.

(i) Si $K = \mathbb{R}$, p seminorme sur E (sans (i)), et $f \in \mathcal{L}(F,K)$, telle que $\forall x \in F$, $f(x) \leq p(x)$.
Alors $\exists\ g \in \mathcal{L}(E,K)$, $g_{|F} = f$, et $\forall x \in E$, $g(x) \leq p(x)$

(ii) Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $f \in F'$ ($= \mathcal{L}_c(F,K)$), alors $\exists g \in E'$, $g_{|F} = f$ et $\|g\| = \|f\|$

Application 1-16:

$\forall x \in E$, $\|x\| = \sup\limits_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|$

Application 1-17:

F sous-espace vectoriel de E.

$[\overline{F} = E] \Leftrightarrow [\forall f \in E', f_{|F} = 0 \Rightarrow f = 0]$

II / Espaces de Banach.

Déf 2-1

$(E, \|\cdot\|)$ est appelé espace de Banach (ou Banach) si E est complet pour $\|\cdot\|$.

Prop 2-2: Tout evn de dimension finie est complet.

Prop 2-3: Si F est un Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un Banach

En particulier E' est un Banach

Déf 2-4: Espace de Baire

Un espace topologique est dit de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense

Théorème 2-5: théorème de Baire

tout espace de Banach est de Baire.

Application 2-6:

Les applications continues nulle part dérivables sont denses dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$

Théorème 2-7: théorème de l'application ouverte.

E, F deux Banachs, $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$, surjective.

Alors $\exists M > 0$, $T(B_E(0,1)) \supset B_F(0, M^{-1})$

ie: $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = T(x)$ et $\|x\| \leq M\|y\|$

Application 2-8:

$T \in \mathcal{L}_c(E,F)$ bijective, E, F Banachs.

Alors T^{-1} est continue.

Application 2-9:

E ev, N_1 et N_2 deux normes sur E, telles qu'$\exists\ c > 0$, $\forall x \in E$, $N_2(x) \leq c\, N_1(x)$.

si E est complet pour N_1 et N_2, alors N_1 et N_2 sont équivalentes

Théorème 2-10: théorème du graphe fermé.

E, F Banachs, $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si $G_T = \{(x, T(x)), x \in E\}$ est un fermé de $E \times F$, alors T est continue

Théorème 2-11: théorème de Banach-Steinhaus

E Banach, F evn, $(T_i)_{i \in I} \subset \mathcal{L}_c(E,F)$ $\boxed{\text{DVPT}}$

Alors:

soit $\sup\limits_{i \in I} |||T_i||| < \infty$

soit $\exists x \in E$, $\sup\limits_{i \in I} \|T_i(x)\| = +\infty$

Corollaire 2-12:

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}_c(E,F)$, telle que $\forall x \in E$, $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément noté $T(x)$, alors $T : x \mapsto T(x) \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

Application 2-13 : $\boxed{\text{DVPT 1 bis}}$

Il existe des fonctions continues, 2π-périodiques, telles que leur série de fourier en 0 diverge

Espaces L^p :

Déf 2-14 :

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $1 \leq p < \infty$. On appelle $L^p(\Omega)$ l'ensemble des $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de puissance p-ième intégrable, et on définit $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

De plus, on pose $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble des $f : \Omega \to \mathbb{R}$ bornées, et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$

Théorème 2-15 : inégalité de Hölder. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 \leq p \leq \infty$.

Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$.

Alors $fg \in L^1(\Omega)$, et $\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$

Conséquence 2-16 : $\forall 1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un evn

Théorème 2-17 : Riesz-Fischer $\boxed{\text{DVPT 2}}$

$\forall 1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Au passage : 2-18 :

toute suite qui converge dans $(L^p(\Omega), \| \|_p)$ admet une sous-suite convergeant presque partout.

III / Espaces de Hilbert

Déf 3-1 :

On appelle espace préhilbertien tout ev muni d'un produit scalaire hermitien, noté $\langle , \rangle$

Prop 3-2 : Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soit E un espace préhilbertien. Alors $\forall x, y \in E$,

$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$

conséquences 3-3 :

- On peut définir une norme sur E par $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$
- $\forall y \in E$, $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est $\mathcal{C}^0$ de norme $\|y\|$

déf 3-4 :

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme associée à $\langle , \rangle$

Exemples 3-5 :

- $\ell^2(\mathbb{N})$ est un hilbert, avec $\langle u, v\rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i \overline{v_i}$
- $L^2([0,1])$ est un hilbert, avec $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}$

théorème 3-6 : Représentation de Riesz-Fréchet

Soit H un espace de Hilbert, $f \in H'$.

$\exists! \, x \in H$ tel que $\forall y \in H$, $f(y) = \langle x, y\rangle$.

tout Hilbert est donc isomorphe à son dual topologique, à travers $f : y \mapsto (x \mapsto \langle x, y\rangle)$

Si H est un hilbert, H' est un hilbert, avec

$\langle \varphi, \psi\rangle = \langle f^{-1}(\varphi), f^{-1}(\psi)\rangle$

théorème 3-7

tout espace de Hilbert est réflexif