208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

I) Espaces Vectoriels Normés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (e.v.) avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Norme sur un espace vectoriel

Définition 1 : Une application $\|\cdot\|$ est dite une norme sur E si elle vérifie :

* $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$
* $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
* $\forall x, y \in E$, $\quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

On appelle espace vectoriel normé (e.v.n.), un e.v. muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Exemples 2 : * $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ avec $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

* $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ avec $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ $\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1])$

* $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ avec $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$

Définition 3 : Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont dites équivalentes sur E si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :
$\forall x \in E$, $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$

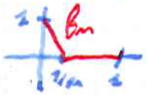
Corollaire 4 : Deux normes équivalentes induisent deux topologies équivalentes.

2) Dimension finie

Propriété 5 : Si $\dim(E) < +\infty$ alors toutes les normes sur E sont équivalentes. C'est faux en dimension infinie.

Exemples 6 : * $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$

* Sur $\mathcal{C}^0([0,1])$, si on pose $f_n : x \longmapsto \begin{cases} 1-nx & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Propriété 7 : * Les sous-e.v. de dimension fini d'un espace de dimension quelconque sont fermés.

* Les compacts sont exactement les fermés bornés.

Théorème 8 : Théorème de Riesz : E est de dimension finie si et seulement si la boule unité fermée est compacte.

II) Applications Continues

Définition 9 : On appelle $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications continues de E dans F. On pose $E' = \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ appelé **le dual topologique** de E.

Théorème 10 : Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ linéaire. On a alors équivalence entre :

i) f est continue sur E
ii) f est continue en 0
iii) f est borné sur la boule unité de E
iv) $\exists M > 0 \setminus \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$ $\forall x \in E$
v) f est lipschitzienne $(\exists M > 0 \mid \|f(x) - f(y)\|_F \leq M \|x-y\|_E$ $\forall x, y \in E)$
vi) f est uniformément continue sur E

GOURDON

Théorème 11 : Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \to \mathbb{R}$ linéaire. Alors f est continue ($f \in E'$) si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

GOURDON p.54

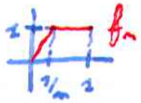
Exemples 12 : * $\forall a \in \mathbb{R}$, $\varphi_a : (\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto f(a)$ est continue $\Rightarrow \varphi_a \in \mathcal{C}^0([0,1])'$

* $I : (\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ $\quad \in \mathcal{C}^0([0,1])'$

* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$ $\quad \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Propriété 13: Si $\dim(E) < +\infty$ alors toute application linéaire de E dans F est continue. C'est faux en dimension ∞.

Exemple 14: $D : (\mathcal{C}^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, $f \longmapsto f'$ n'est pas continue. Soit $f_n : x \longmapsto \begin{cases} nx & \text{sur } [0,1/n] \\ 1 & \text{sur } [1/n, 1] \end{cases}$



$$\left.\begin{array}{l} \|f_n\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \|f_n'\|_\infty = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists M > 0 \text{ tel que } \|f_n'\|_\infty \leq M \|f_n\|_\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Définition 15: On appelle norme d'opérateur l'application

$$|||\cdot||| : \mathcal{L}_c(E,F) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f \longmapsto \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$$

$(\mathcal{L}_c(E,F), |||\cdot|||)$ est un e.v.n.

Exemple 16: * Soit H un espace de Hilbert. Alors $\forall g \in H$ $|||\varphi_g : f \longmapsto \langle f, g \rangle||| = \|g\|_H$.

* Soit M ~~...~~ $= \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{K})$.

Soit $\varphi : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $X \longmapsto MX$ alors $|||\varphi||| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |\lambda_i|$

Propriété 17: Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $f \circ g \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|||f \circ g||| \leq |||f||| \times |||g|||$.

Application 18: $\forall f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k}{k!}$ converge.

III) Espaces de Banach

Définition 19: $(E, \|\cdot\|_E)$ est dit espace de Banach si E est un e.v.n. complet pour la métrique associée à $\|\cdot\|_E$.

Exemple 20: * $(\mathcal{C}^{0,\alpha}([0,1]), \|\cdot\|)$ est complet pour la norme $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}$ $\forall f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}([0,1])$

* $(M_n(\mathbb{R}), |||\cdot|||)$ est complet

* $(W^{1,p}, \|\cdot\|_{W^{1,p}})$ est complet $\forall p \in \mathbb{N}^*$ pour la norme $\|f\|_{W^{1,p}} = \|f\|_p + \|f'\|_p$ $\forall f \in W^{1,p}$

Propriété 21: Si $\dim(E) < +\infty$ alors E est un espace de Banach. Ce n'est plus vrai si $\dim(E) = +\infty$.

Exemple 22: $(\mathbb{K}[X], \|\cdot\|)$ avec $\|\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\| = \max_{k \in [\![0,n]\!]} |a_k|$ n'est pas complet.

Soit $P_n(X) = \frac{1}{n} X^n$ alors $(P_n)_n$ est de Cauchy car $\|P_{n+p}(X) - P_n(X)\| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ $\forall p \in \mathbb{N}$ mais $(P_n)_n$ ne converge pas dans $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 23: Si F est un espace de Banach alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est aussi un espace de Banach. E' est donc tout le temps un espace de Banach.

Lemme 24: Soit X un espace métrique complet et $(X_n)_n$ une suite de fermés tels que $\mathrm{Int}(X_n) = \emptyset$ $\forall n \geq 1$. Alors $\mathrm{Int}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n\right) = \emptyset$. (Lemme de Baire)

Théorème 25: Théorème de Banach-Steinaus ; Soient E et F deux Banach, Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $\forall x \in E$, $\sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < +\infty$. Alors $\sup |||T_i||| < +\infty$.

D
V
P

BREZIS
p.15

Application 26: * Soit E un espace de Banach **admettant** une base B. Alors soit B est fini soit B est indénombrable.

GOURDON
p.393

* Il existe une fonction f **continue** telle que sa série de Fourier **diverge**.

GOURDON
p.399

* Soit $(T_n)_n \in \mathcal{L}_c(E,F)^{\mathbb{N}}$ avec E et F deux espaces de Banach. On suppose que $\forall x \in E$, $(T_n(x))_n$ converge vers une limite notée Tx. Alors $T \in \mathcal{L}_c(E,F)$.

Théorème 27: Théorème du point fixe de Banach:
Soient E un espace de Banach et f une application k-contractante de E dans E. Alors f admet un unique point fixe x_0 dans E.

Brezis p. 83

Application 28: Théorème de Cauchy-Lipschitz : Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, E)$. Si f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable alors l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{d x(t)}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \quad (t_0, x_0) \in \Omega \end{cases}$$

admet une unique solution maximale.

DVP

Théorème 29 : Théorème de Hahn-Banach Analytique :
Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
* $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E$ et $\forall \lambda > 0$
* $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E$

Soit G un sous-e.v. de E et $g : G \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in G$

Alors il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et telle que $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

Corollaire 30 : Soit G un sous-e.v. de E et $g \in \mathcal{L}_c(G, \mathbb{R})$. Alors $\exists f \in \mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ telle que $|||f||| = |||g|||$.

Brezis p. 1-3

IV.) Les espaces de Hilbert

Définition 31 : Soit H un e.v., si H est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et est complet pour la norme induite par le produit scalaire alors H est appelé un espace de Hilbert.

Exemples 32 : * $(L^2([0,1]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ avec $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ $\forall f, g \in L^2([0,1])$.
* $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ avec $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Théorème 33 : Soit H un espace de Hilbert et $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors $\forall f \in H$, $\exists! u \in K$ tel que :

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|$$

De plus, u est caractérisé par la propriété :

$$u \in K \text{ et } \langle f - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$$

On note $u = P_K(f)$.

Corollaire 34 : Soit $F \subset H$ un sous-e.v. fermé. Soit $f \in H$ alors $u = P_F(f)$ est caractérisé par :

$$u \in K \text{ et } \langle f - u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in K$$

De plus, P_K est une application linéaire.

Théorème 35 : Soit H un espace de Hilbert et $\varphi \in H'$ alors $\exists f \in H$ telle que $\varphi(x) = \langle f, x \rangle \quad \forall x \in H$.
De plus, $|||\varphi||| = \|f\|_H$.

Lorsque H est un espace de Hilbert on peut donc l'identifier à son dual topologique.

Brezis p. 78-82

Références :

* X. Gourdon – Analyse
* H. Brézis – Analyse Fonctionelle
* Le cours sur les e.v.n qu'on a eu (Quasiment tout ce qui n'est pas référencé vient de là)

Théorème de Banach-Steinhaus

Rubén Muñoz--Bertrand

5 octobre 2014

Référence : Haïm Brézis - *Analyse fonctionnelle*, p.15-17.

⚠ Ne jamais prendre BS dans Brézis : F evn suffit.

Énoncé : Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F, avec I une famille d'indices quelconque. Si pour tout x appartenant à E, $\sup_{i \in I} ||T_i(x)|| < +\infty$, alors $\sup_{i \in I} |||T_i||| < +\infty$.

Preuve : Nous aurons besoin du lemme de Baire pour prouver ce théorème.

Lemme de Baire : Soit X un espace métrique complet, et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés de X d'intérieur vide. Alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est d'intérieur vide.

Démonstration du lemme : Passons au complémentaire : on pose $Y_n = {}^c X_n$. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite d'ouverts denses. Il suffira de démontrer que leur intersection Y est dense.

Soit Ω un ouvert non vide de X. On peut trouver $x_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B(x_0, r_0)} \subset \Omega$.

On construit ensuite une suite $(x_n, r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap Y_n \\ 0 < r_{n+1} < \dfrac{r_n}{2} \end{cases}$$

Une telle suite existe puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\subset B(x_n, r_n) \cap Y_n$ est un ouvert non vide puisque Y_n est dense.

On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme X est complet, elle admet une limite l. Par construction, pour n et p deux entiers naturels, on a toujours $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$; en passant à la limite, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $l \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset Y_{n-1}$, et $l \in \overline{B(x_0, r_0)} \subset \Omega$. Donc $l \in Y \cap \Omega$. Cela signifie que tout ouvert de X possède un élément commun avec Y, qui est donc dense : le lemme est démontré.

Démonstration du théorème : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on va poser $X_n = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ ||T_i(x)|| \leqslant n\}$ qui est un fermé de E. Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = E$, qui est d'intérieur non vide, il résulte du lemme de Baire qu'il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{X_m} \neq \emptyset$.

On peut par conséquent trouver un $x_m \in X_m$ et un $r > 0$ tels que $B(x_m, r) \subset X_m$. On a alors :

$$\forall i \in I,\ \forall z \in B(0_E, 1),\ ||T_i(x_m + rz)|| \leqslant m$$

Donc : $\forall z \in B(0_E, 1),\ ||T_i(z)|| \leqslant \dfrac{1}{r}||T_i(zr)|| \leqslant \dfrac{1}{r}(||T_i(x_m)|| + m)$.

Ce qui prouve le théorème.

$\square$

Théorème de Hahn-Banach analytique

Rubén MUÑOZ--BERTRAND

5 octobre 2014

Référence : Haïm BRÉZIS - *Analyse fonctionnelle*, p.1-3.

Notation : Si E et F sont deux espaces vectoriels réels, on note $F < E$ pour dire que F est un sous-espace vectoriel de E.

Énoncé : Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}+$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $f \in F'$, alors il existe $g \in E'$ tel que $g|_F = f$ et $||g||_{E'} = ||f||_{F'}$.

Preuve : La preuve de ce théorème repose sur le lemme de Zorn dont on rappelle l'énoncé :

Lemme de Zorn : Tout ensemble ordonné, inductif et non vide possède un élément maximal.

Nous allons donc considérer l'ensemble :

$$P = \left\{ (h, D_h) \;\middle|\; \begin{array}{l} F \subset D_h < E, \\ h \in D_h', \\ h|_F = f, \\ ||h||_{D_h'} = ||f||_{F'} \end{array} \right\}$$

C'est à dire l'ensemble des applications linéaires h qui prolongent f sur un sous-espace vectoriel de E contenant F et qui conservent la norme.

Nous allons munir cet ensemble de l'ordre suivant :

$$(h, D_h) \leqslant (h', D_{h'}) \Leftrightarrow \begin{cases} D_h \subset D_{h'} \\ h'|_{D_h} = h \end{cases}$$

Vérifions à présent que cet ensemble vérifie les hypothèses du lemme de Zorn. Comme $(f, F) \in P$, l'ensemble n'est pas vide.

Il suffit donc de vérifier que l'ensemble est inductif : considérons une partie totalement ordonnée de P, que nous noterons $O = \big((h_i, D_i)\big)_{i \in I}$, où I est un ensemble d'indices.

Définissons $D_h = \bigcup\limits_{i \in I} D_i$ et posons $h(x) = h_i(x)$ quand $x \in D_i$.

D_h est un sous-espace vectoriel de E car si l'on considère $(x, y) \in D_h$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors comme $x \in D_i$ et $y \in D_j$ pour un certain couple $(i, j) \in I^2$, comme on a soit $D_i \subset D_j$ soit $D_i \supset D_j$ (puisque l'ensemble est totalement ordonné) on aura bien $x + \lambda y \in D_i \cup D_j \subset D_h$. Il est de plus clair que $F \subset D_h$.

h est bien définie, car si $x \in D_i \cap D_j$, comme on a soit $h_i|_{D_j} = h_j$ soit $h_j|_{D_i} = h_i$, la définition de $h(x)$ ne dépend pas du $D_i \ni x$ choisi. Il est aussi immédiat que $h|_F = f$.

h définit donc une application de D_h dans $\mathbb{R}$ qui est bien linéaire puisque de l'argumentation précédente on déduit : $h(x + \lambda y) = h(x) + \lambda h(y)$.

Il ne reste enfin qu'à vérifier que $||h||_{D_h'} = ||f||_{F'}$, mais cela est immédiat car : $||h||_{D_h'} = \sup\limits_{||x||_{D_h}=1} |h(x)| = \sup\limits_{i \in I} \sup\limits_{||x||_{D_i}=1} |h(x)| = \sup\limits_{i \in I} ||h_i||_{D_i'} = ||f||_{F'}$.

Cela prouve donc que $(h, D_h) \in P$, et par construction (h, D_h) est un majorant de O ; nous avons donc démontré que P est inductif.

D'après le lemme de Zorn, P possède donc un élément maximal (g, D_g). Si $D_g = E$, le théorème est prouvé. Supposons donc qu'il existe $x \in E \setminus D_g$.

On considère alors $D_h = D_g + \mathbb{R}x_0$. On a $F \subset D_g \subset D_h < E$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $h_\alpha : \begin{array}{c} D_h \to \mathbb{R} \\ x + tx_0 \mapsto g(x) + t\alpha \end{array}$ qui est une application linéaire vérifiant $h_\alpha|_F = f$.

Nous allons trouver α de telle sorte que $||h_\alpha||_{D'_h} = ||f||_{F'}$. Pour cela on doit avoir pour tout $x \in D_g$ et tout $t \in \mathbb{R}$: $h_\alpha(x+tx_0) \leqslant ||f||_{F'}||x+tx_0||_{D_h}$.

En fait, si l'on divise les deux termes par $|t|$ (le cas $t = 0$ étant déjà vérifié), et que l'on pose $y = \dfrac{x}{|t|}$, on remarque qu'il suffit de vérifier que pour tout $y \in D_g$:

$$\begin{cases} g(y) + \alpha \leqslant ||f||_{F'}||y + x_0||_{D_h} \\ g(y) - \alpha \leqslant ||f||_{F'}||y - x_0||_{D_h} \end{cases}$$

Donc α vérifie :

$$\sup_{x \in D_g} \{g(x) - ||f||_{F'}||x - x_0||_{D_h}\} \leqslant \alpha \leqslant \inf_{y \in D_g} \{||f||_{F'}||y + x_0||_{D_h} - g(y)\}$$

Et un tel α existe puisque pour tout $(x, y) \in D_g^2$:

$$\begin{aligned} g(x) + g(y) &= g(x - x_0) + g(y + x_0) \\ &\leqslant ||f||_{F'}(||x - x_0||_{D_h} + ||y + x_0||_{D_h}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall (x, y) \in D_g^2,\ g(x) - ||f||_{F'}||x - x_0||_{D_h} \leqslant ||f||_{F'}||y + x_0||_{D_h} - g(y)$$

Le α recherché existe donc bien, on a alors $||h_\alpha||_{D'_h} \leqslant ||f||_{F'}$. Or comme par construction $||h_\alpha||_{D'_h} \geqslant ||f||_{F'}$, on a fabriqué un couple $(h_\alpha, D_h) \in P$ tel que $(h_\alpha, D_h) \geqslant (g, D_g)$, ce qui contredit la maximalité de (g, D_g), donc $D_g = E$ et le théorème est prouvé.

$\square$