208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

# I) Généralités

## 1) Espaces vectoriels normés (e.v.n)

[GOU] p7

**Déf 1 :** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur $E$ toute application $E\to\mathbb{R}^+$, $x\mapsto\|x\|$ telle que :
i) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$
ii) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall x\in E,\ \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$
iii) $\forall(x,y)\in E^2,\ \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (inégalité triangulaire)
$E$ muni d'une norme est appelé $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

[GOU] p8

**Ex 2 :**
- $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $(\mathbb{C},|\cdot|)$
- Dans $\mathbb{R}^n$, on note $x=(x_1,\dots,x_n)$ : $\|x\|_1=\sum|x_i|$ et $\|x\|_\infty=\sup|x_i|$ sont des normes.
- $(L^p(\mathbb{R}),\|\cdot\|_p)$ où $\|f\|_p=\left(\int|f|^p\right)^{1/p}$, $p\in[1,+\infty[$
- $(\mathcal{B}(X,E),\|\cdot\|_\infty)$ où $\mathcal{B}(X,E)$ est l'ensemble des applications bornées d'un ensemble $X$ dans un evn $E$ et $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}\|f(x)\|$.

[HAU] p318

**Ct-ex 3 :**
- Soit $(E,\|\cdot\|)$ un evn et $N : E\to\mathbb{R}_+$, $x\mapsto[illegible]$ ne vérifie ii) et iii) mais pas i).
- $N : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$, $(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\max(|x_1|,|x_2|) & \text{si } x_1x_2\geq0\\ [illegible] & \text{si } x_1x_2<0\end{cases}$ vérifie i) et ii) mais pas iii).
- $N : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$, $(x_1,x_2)\mapsto|x_1|$ vérifie ii), iii) mais pas i).

[GOU] p47-48

**Rq 4 :** Si $(E,\|\cdot\|)$ est un evn, $d(x,y)=\|x-y\|$ définit une distance sur $E$.

**Rq 5 :** $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne donc continue.

**Déf 6 :** 2 normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $E$ sont dites équivalentes si : $\exists a,b>0$ $\forall x\in E$ $a\|x\|_2\leq\|x\|_1\leq b\|x\|_2$.

**Rq 7 :** 2 normes équivalentes définissent des distances équivalentes donc la même topologie.

[HAU] p322

**Ct-ex 8 :** On munit $C([0,1],\mathbb{R})$ des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|f\|_1=\int_0^1|f(t)|dt$. $\|\cdot\|_1\leq\|\cdot\|_\infty$ mais $\nexists\alpha>0$ $\|\cdot\|_\infty\leq\alpha\|\cdot\|_1$.

## 2) Applications linéaires continues

[GOU] p48

**Thm 9 :** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-evn, $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
1) $f$ est continue sur $E$
2) $f$ est continue en $0$
3) $f$ est bornée sur $\overline{B_f}(0,1)$
4) $f$ est bornée sur $S_E(0,1)$
5) $\exists M>0$ $\forall x\in E$ $\|f(x)\|_F\leq M\|x\|_E$
6) $f$ est lipschitzienne
7) $f$ est uniformément continue sur $E$.

[ROM] p64

**Ex 10 :**
- Sur $(C([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ $u : f\mapsto\int_0^1 f(t)g(t)dt$ (où $g\in C([0,1],\mathbb{R})$ fixée) est linéaire continue.
- $\phi : (C_{2\pi},\|\cdot\|_\infty)\to(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)$, $f\mapsto(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est linéaire continue.

**Ct-ex 11 :** On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|P(x)|$. $\phi : P\mapsto P'$ est linéaire non continue car $\phi(x^n)$ n'est pas bornée.

[GOU] p48

**Déf 12 :** L'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $F$ est noté $\mathcal{L}_c(E,F)$. On définit pour $f\in\mathcal{L}_c(E,F)$ $|||f|||=\sup_{\|x\|\leq1}\|f(x)\|=\sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|$.
$(\mathcal{L}_c(E,F),|||\cdot|||)$ est un evn.

**Rq 13 :** $|||f|||=\inf\{M\geq0,\ \|f(x)\|_F\leq M\|x\|_E\ \forall x\in E\}$

[ROM] p66

**Ex 14 :** Reprenons les applications de l'exemple 10.
- Si $g\geq0$ $|||u|||=\int g(t)dt$.
- $|||\phi|||=1$.

[HAU] p825

**Ex 15 :** La norme d'une application linéaire continue n'est pas toujours atteinte :
Soit $E=\{f\in C([0,1],\mathbb{R})\ [illegible]\}$ muni de $\|f\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$.
$u : E\to\mathbb{R}$, $f\mapsto\int_0^{1/2}f(t)dt-\int_{1/2}^1 f(t)dt$ est une application linéaire continue.
$|||u|||=1$ mais il n'existe aucun $f\in E$ tel que $\|f\|_\infty=1$ et $|u(f)|=1$.

[GOU] p48 **Prop 16** : Soient $E, F, G$ trois e.v.n, $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $g \in \mathcal{L}_c(F,G)$.
Alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|||g \circ f||| \leq |||g|||\,|||f|||$.
En particulier, $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}_c(E,E)$ en fait une algèbre normée.

### 3) Continuité des formes linéaires.

[GOU] p49 **Def 17** : Soit $E$ un $\mathbb{K}$-evn. L'e.v. $\mathcal{L}_c(E,\mathbb{K})$ est un sev du dual $E^*$ de $E$. On le note $E'$ et on l'appelle dual topologique de $E$.

**Prop 18** : Une forme linéaire $f$ sur $E$ est continue ssi $\ker(f)$ est fermé.

[HAU] p323 **ct-ex 19** : $u$ : $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $f \mapsto f(0)$ est une forme linéaire non continue.

[POM] p66 **Thm 20** (Hahn-Banach) [HGMIS] : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, $F$ un sev de $E$ et $f \in F'$. Alors il existe un prolongement linéaire continu $g$ de $f$ à $E$ tq $\|g\|_{E'} = \|f\|_{F'}$.

**Appli 21** : Soit $F$ un sev de l'evn $(E, \|\cdot\|_E)$. $F$ est dense dans $E$ ssi toute forme linéaire continue nulle sur $F$ est nulle sur $E$.

### 4) Cas de la dimension finie.

[GOU] p50 **Thm 22** : Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

**ct-ex 23** : Faux en dimension infinie, cf ct-ex 8.

**Corollaire 24** : Toute application linéaire d'un evn de dimension finie dans un evn (quelconque) est continue.

**ct-ex 25** : Faux en dimension infinie : on munit $\mathbb{R}[X]$ de $\|\sum a_k X^k\| = \sup |a_k|$. $f : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P'$ est linéaire non continue.

**Corollaire 26** : Dans un evn de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés.

[HAU] p326 **ct-ex 27** : Faux en dimension infinie, on munit $\mathbb{R}[X]$ de $\|\sum a_k X^k\| = \max_k |a_k|$. $B := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \|P\| \leq 1\}$ est fermée bornée mais pas compacte ($P_n = X^n$, $(P_n)$ suite de $B$ qui ne possède aucune sous-suite convergente).

[GOU] p50 **Prop 28** : Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé.

[POM] p69 **Thm 29** (Riesz) : Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n. $E$ est de dimension finie ssi la boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|_E)$ est compacte.

## II) ESPACES DE BANACH.

### 1) Définition et premiers résultats.

**Def 30** : Un espace de Banach est un evn complet. [GOU] p47

**Ex 31** : Tout evn de dimension finie est un espace de Banach. [GOU] p50

**ct-ex 32** : $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ est un evn non complet : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. [HAU] p312

**Prop 33** : Si $F$ est un espace de Banach alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un Banach. [GOU] p49

**Corollaire 34** : $E' = \mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ est un espace de Banach.

**Corollaire 35** : Si $E$ complet, toute série $\sum f_n$ de $\mathcal{L}_c(E)$ absolument convergente est convergente.

**Appli 36** : Soient $E$ un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||u||| < 1$. Alors $I - u$ est inversible, son inverse est $\sum_{n=0}^{\infty} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$.

**Appli 37** (Application de l'appli 36) : On note $\mathcal{GL}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes inversibles continus et tels que $u^{-1}$ est continu. Si $E$ est un espace de Banach alors $\mathcal{GL}_c(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E)$.

[POM] p66 **Thm 38** : Si $f$ est une application linéaire continue définie sur une partie dense de l'evn $(E, \|\cdot\|_E)$ à valeurs dans $(F, \|\cdot\|_F)$ complet alors $f$ possède un unique prolongement continu à $E$.

### 2) Lemme de Baire et conséquences.

[GOU] p397 **Thm 39** (Lemme de Baire) : Soit $(E,d)$ un espace métrique complet.
- Si $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts de $E$ denses dans $E$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est dense dans $E$.
- Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'intérieur vide alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

[GOU] p399 **Appli 40** : Un evn admettant une base dénombrable (non finie) n'est pas complet.

[GOU] p404-405 **Thrm 41** (Banach-Steinhaus) : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $(F, \|\cdot\|_F)$ un evn. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Alors ou bien $(T_i)_{i\in I}$ est bornée, ou bien il existe $x \in E$ tq $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F = +\infty$.

DEV 1 **Applic 42** : Il existe $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que $(S_n(f)(0))$ diverge ($S_n(f)$ désigne la somme partielle d'indice $n$ de la série de Fourier de $f$). En particulier $f$ n'est pas somme de sa série de Fourier.

[BRE] p18-19 **Thrm 43** (Thrm de l'application ouverte) : Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et $T$ un opérateur linéaire continu et surjectif de $E$ sur $F$. Alors : $\exists c > 0$ $B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$.

**Rq 44** : $T$ transforme tout ouvert de $E$ en ouvert de $F$.

**Corollaire 45** (isomorphisme de Banach) : Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach et soit $T$ un opérateur linéaire continu et bijectif de $E$ sur $F$. Alors $T^{-1}$ est continu de $F$ dans $E$.

[RUD] **Applic 46** : L'application linéaire continue injective

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} (L^1([0,2\pi],\mathbb{C}), \|\cdot\|_1) & \longrightarrow & (c_0(\mathbb{Z},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty) \\ f & \longmapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

n'est pas surjective.

[BRE] p19 **Applic 47** : Soit $E$ un ev muni de 2 normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. Si $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont des Banach, et $\exists C > 0$ tq $\|\cdot\|_2 \leq C\|\cdot\|_1$ alors $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

[BRE] p20 **Thrm 48** (Graphe fermé) : Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach. Soit $T$ linéaire. Si le graphe de $T$ est fermé dans $E\times F$ alors $T$ est continu : $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

[AMS] p181 **ct-ex 49** : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est discontinue mais sa graphe est fermé. ($\mathbb{R}$ n'est pas linéaire)

## III) ESPACES DE HILBERT.

### 1) Norme et exemples d'Hilbert.

[H-L] p84 **Def 50** : Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur $E$. Le couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est appelé espace préhilbertien réel.

[H-L] p86 **Prop 51** (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. On a : $\forall x,y \in E$ $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$.

**Coro 52** : Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. L'application $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ définit une norme sur $E$.

**Def 53** : Un espace préhilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé espace de Hilbert. [H-L] p88

**Ex 54** : $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ où $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

**Prop 55** (identité de polarisation) : $\forall x,y \in E$ $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ [H-L] p86

**Prop 56** (identité du parallélogramme) : Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace préhilbertien : $\forall x,y \in E$ $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

**Prop 57** (Pythagore) : Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace préhilbertien réel et $\langle x,y\rangle = 0$ alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

### 2) Applications linéaires sur un espace de Hilbert. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle, \|\cdot\|)$ Hilbert.

[H-L] p92 **Thrm 58** : Soit $C$ une partie fermée, convexe et non vide de $E$. Alors : $\forall x \in E$ $\exists! y \in C$, $\|x-y\| = d(x,C)$.

- Ce point est appelé projection de $x$ sur $C$ et noté $P_C(x)$, est caractérisé par : $y \in C$ et $\forall z \in C$ $\mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$.
- $P_C$ est 1-lipschitzienne.
- Si $F$ est un sev fermé de $E$ alors $P_F$ est un opérateur linéaire de $E$ sur $F$. Si $x \in E$ alors $P_F(x)$ est l'unique élément $y \in E$ tel que $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

[ROU] p385 **Appli 59** (moindres carrés) : Étant donnés $n$ points $(x_i, y_i)$ du plan $\mathbb{R}^2$ avec des $x_i$ non tous égaux entre eux. Il existe $\lambda, \mu$ uniques qui rendent minimum $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$.

[H-L] p93 **Coro 60** : Pour tout sev fermé $F$ de $E$, $E = F \oplus F^\perp$.

[H-L] p96 **Thrm 61** (Thrm de représentation de Riesz) : Pour toute forme linéaire continue $\phi$ sur $E$ il existe un unique $y \in E$ tq $\phi(x) = \langle x,y\rangle$ $\forall x \in E$.

**Applic 62** : Pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$ il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(E)$ telque : $\forall x,y \in E$ $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$.

[H-L] p104 **Applic 63** (Thrm de Lax Milgram) : Soit $E$ un espace de Hilbert réel. Soit $a$ une forme bilinéaire sur $E$, continue et coercive. Soit $L$ une forme linéaire continue sur $E$. Alors il existe un unique $u \in E$ tq : $\forall y \in E$ $a(u,y) = L(y)$.

DEV 2

## Références.

Parties I et II : 
- Gourdon Analyse
- Pommellet, Cours d'analyse
- Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques.
- Brezis, Analyse fonctionnelle.

Partie III : 
- Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle.

+ Ressource pour les moindres carrés.

# Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème : Soient $(E,\|\|_E)$ un espace de Banach et $(F,\|\|_F)$ un e.v.n. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Alors ou bien $(f_i)_{i\in I}$ est bornée, ou bien il existe $x\in E$ tel que $\sup_{i\in I}\|f_i(x)\|_F = +\infty$

Démonstration :

Pour $k\in\mathbb{N}$, on définit $\Omega_k = \{x\in E,\ \sup_{i\in I}\|f_i(x)\|_F > k\}$.

* Montrons que $\Omega_k$ est ouvert pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Soit $k\in\mathbb{N}$. Soit $x_0\in\Omega_k$. Il existe $i\in I$ tq $\|f_i(x_0)\|>k$.

Comme $f_i$ est continue on a alors :

$$\exists r>0,\ \forall x\in B(x_0,r),\ \|f_i(x)\|_F > k.$$

Donc : $B(x_0,r)\subset\Omega_k$. Par conséquent, $\Omega_k$ est ouvert.

* Supposons que pour tout $k\in\mathbb{N}$ $\Omega_k$ est dense dans E.

Comme E est un espace complet, d'après le théorème de Baire on obtient que $\Omega = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$ est dense dans E. En particulier, $\Omega$ est non vide.

Soit alors $x\in\Omega$. On a $\sup_{i\in I}\|f_i(x)\|_F = +\infty$

* Sinon, il existe $k\in\mathbb{N}$ tq $\Omega_k$ n'est pas dense dans E. Alors :

$$\exists x_0\in E,\ \exists \varepsilon>0,\ B(x_0,\varepsilon)\cap\Omega_k=\emptyset.$$

Autrement dit :

$$\exists x_0\in E,\ \exists\varepsilon>0,\ \forall x\in B(x_0,\varepsilon),\ \sup_{i\in I}\|f_i(x)\|_F\le k.$$

Alors : $\forall x\in B(0,\varepsilon), \forall i\in I$ $\|f_i(x)\|_F = \|f_i(x+x_0)-f_i(x_0)\|_F$ car $f_i$ est linéaire.

$\le \|f_i(x+x_0)\|_F + \|f_i(x_0)\|_F$ par inégalité triangulaire.

$\le 2k$. car $x_0\in B(x_0,\varepsilon)$ et $x+x_0\in B(x_0,\varepsilon)$

Soit alors $x\in E$ tq $\|x\|_E = 1$.

$\forall i\in I$ $\|f_i(x)\|_F = \frac{2}{\varepsilon}\|f_i(\frac{\varepsilon}{2}x)\|_F$ car $f_i$ est linéaire.

$\le \frac{2}{\varepsilon}\times 2k$.

on pourrait prendre $\varepsilon$ au lieu de $\frac{\varepsilon}{2}$ mais il faudrait alors dire que l'inégalité précédente s'étend à $\overline{B(x_0,\varepsilon)}$ par continuité de $f$.

D'où : $\forall i\in I$ $|||f_i||| \le \frac{4}{\varepsilon}k$.

Remarque : On a en fait montré :

- soit $(f_i)_{i\in I}$ est bornée
- soit il existe une partie $\Omega$ dense dans E tq. $\forall x\in\Omega$ $\sup_{i\in I}\|f_i(x)\|_F = +\infty$.

## Application :

On note $C_{2\pi}$ le $\mathbb{C}$-ev des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodiques, à valeurs dans $\mathbb{C}$, que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ usuelle.
Pour $f \in C_{2\pi}$, on définit :
$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$
$$\forall n \geq 0 \quad S_n(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$
Alors il existe $f \in C_{2\pi}$ tq $(S_n(f)(0))_{n\geq 0}$ diverge. En particulier, $f$ n'est pas somme de sa série de Fourier.

Démonstration.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit $g_n : \begin{array}{l} C_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C} \\ f \mapsto S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f). \end{array}$

* Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrons que $g_N$ est une forme linéaire continue sur $C_{2\pi}$. Et calculons sa norme.
  - $g_N$ est une forme linéaire : ok.
  - Soit $f \in C_{2\pi}$.
$$g_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(-t) dt \text{ où } D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = \begin{cases} \dfrac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} & \text{si } t \in ]-\pi;0[\cup]0;\pi[ \\ 2n+1 & \text{si } t=0. \end{cases}$$
$D_N(-t) = D_N(t)$.

Donc $|g_N(f)| \leq \|f\|_\infty \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt.$

Donc $g_N \in \mathcal{L}_c(C_{2\pi}, \mathbb{C})$ et $|||g_N||| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt.$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on définit $f_k \in C_{2\pi}$ par $f_k(t) = \dfrac{D_N(t)}{|D_N(t)| + 2^{-k}}.$

Alors par convergence dominée :
$$g_N(f_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{D_N(t)^2}{|D_N(t)| + 2^{-k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt.$$

Donc $|||g_N||| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(t)| dt.$

* Montrons $\lim_{N\to+\infty} |||g_N||| = +\infty$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. $|||g_N||| = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |D_N(t)| dt$ car $t \mapsto |D_N(t)|$ est paire.
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} \right| dt$$
$$\geq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{t/2} \right| dt$$
$$\underset{u=(N+\frac{1}{2})t}{\geq} \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$$

* $C_{2\pi}$ est complet et $\sup_{N\in\mathbb{N}} |||g_N||| = +\infty$. D'après le théorème de Banach Steinhaus, il existe donc $f \in C_{2\pi}$ tq $\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n(f)(0)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |g_n(f)| = +\infty$.

Remarque : En fait, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, $2\pi$-périodiques, à valeurs dans $\mathbb{C}$, dont la série de Fourier diverge en 0 est dense dans $C_{2\pi}$.

# Théorème de Lax-Milgram.

<u>Théorème</u> : Soit $(H, <\cdot,\cdot>)$ un espace de Hilbert réel. Soit $a$ une forme bilinéaire sur $H$ continue et coercive, c'est à dire :

$$\exists C>0, \quad \forall x,y \in H \quad |a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|.$$
$$\exists \alpha>0, \quad \forall x\in H \quad a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2.$$

Soit $L$ une forme linéaire continue sur $H$. Alors il existe un unique $u\in H$ telque :

$$\forall y \in H \quad a(u,y) = L(y).$$

De plus, si $a$ est symétrique alors le point $u$ est caractérisé par :

$$\phi(u) = \min_{x\in H} \phi(x), \quad \text{où} \quad \phi : \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}a(x,x) - L(x). \end{array}$$

<u>Démonstration</u> :

<u>Etape 1</u> : Montrons qu'il existe une application $T : H \to H$ linéaire continue telle que pour tout couple $(x,y)\in H^2$ on ait $a(x,y) = \langle T(x), y\rangle$.

- Pour tout $x\in H$, l'application $y \mapsto a(x,y)$ est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur de $H$ noté $T(x)$ tel que $a(x,y) = \langle T(x), y\rangle$.
  Soit $T : x \mapsto T(x)$. Montrons que $T$ est linéaire continue.

- Soient $x_1, x_2 \in H$, soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $y\in H$.
  $$\begin{aligned}\langle T(x_1+\lambda x_2), y\rangle &= a(x_1+\lambda x_2, y) \\ &= a(x_1,y) + \lambda a(x_2,y) \quad \text{par bilinéarité de } a \\ &= \langle T(x_1), y\rangle + \lambda\langle T(x_2), y\rangle. \\ &= \langle T(x_1) + \lambda T(x_2), y\rangle.\end{aligned}$$
  Ceci étant vrai pour tout $y\in H$, on a $T(x_1+\lambda x_2) = T(x_1) + \lambda T(x_2)$ donc $T$ est linéaire.

- Soit $x\in H$. On a :
  $\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = a(x, T(x)) \leq C\|x\|\|T(x)\|$ par continuité de $a$.
  En distinguant les cas $\|T(x)\| = 0$ et $\|T(x)\| \neq 0$, on obtient $\|T(x)\| \leq C\|x\|$.
  $T$ est donc linéaire.

<u>Etape 2</u> : Montrons que $T$ est bijective.

- Montrons d'abord : $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\| \quad \forall x\in H$. $(*)$.
  Soit $x\in H$. $\|T(x)\|\|x\| \geq \langle T(x), x\rangle$ d'après Cauchy-Schwarz
  $$\begin{aligned}&\geq a(x,x) \\ &\geq \alpha\|x\|^2 \quad \text{car } a \text{ coercive.}\end{aligned}$$
  D'où $(*)$.
- $T$ est injective : Soit $x\in \ker T$. D'après $(*)$ on a $x=0$
- Pour montrer que $T$ est surjective, on va montrer que $T(H)$ est dense dans $H$ et que $T(H)$ est fermé.
  → Soit $y\in T(H)^\perp$. Pour tout $x\in H$ on a :
  $$0 = \langle T(x), y\rangle = a(x,y)$$
  Pour $x=y$ : $0 = a(y,y) \geq \alpha\|y\|^2$ (coercivité) donc $y=0$. Donc : $T(H)^\perp = \{0\}$ donc par le critère de densité $T(H)$ est dense dans $H$.

  → Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $T(H)$ qui converge vers $y\in H$. Notons $y_n = T(x_n)$. Comme $(y_n)$ converge, elle est de Cauchy.
  Soit $\varepsilon>0$. $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n,m\geq N$ on ait
  $$\varepsilon > \|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq \alpha\|x_n - x_m\|$$

Donc $(x_n)$ est de Cauchy. Comme $H$ est complet, $(x_n)$ converge. Notons $x$ sa limite. Par continuité de $T$, on a $y = \lim_{n\to+\infty} T(x_n) = T(x)$.
Donc $y \in T(H)$ et $T(H)$ est fermé.

$\rightarrow$ On a donc : $T(H) \underset{T(H)\text{ fermé}}{=} \overline{T(H)} \underset{\text{densité}}{=} H$ donc $T$ est surjective.

**Etape 3 : Conclusion :**

Soit $L$ une forme linéaire continue sur $H$. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément $v \in H$ tq :

$$\forall y \in H \quad L(y) = \langle v, y \rangle.$$

Soit $u = T^{-1}(v)$. Alors :

$$\forall y \in H \quad L(y) = \langle T(u), y \rangle = a(u, y),$$

Ce qui conclut la première partie du théorème.

**Etape 4 : Caractérisation.**

$$\begin{aligned}
\phi(x) - \phi(u) &= \frac{1}{2} a(x,x) - a(u,x) - \frac{1}{2} a(u,u) + a(u,u) \\
&= \frac{a(x,x)}{2} - \frac{a(u,x)}{2} - \frac{a(u,x)}{2} + \frac{a(u,u)}{2} \\
&= \frac{a(x-u,x)}{2} - \frac{a(x-u,u)}{2} \quad \text{car } a \text{ symétrique} \\
&= \frac{a(x-u,x-u)}{2} \\
&\geq \frac{\alpha}{2} \|x-u\|^2 \\
&> 0 \quad \text{si } x \neq u
\end{aligned}$$

Donc $\phi(u) = \min_{x \in H} \phi(x)$.