208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

I - ESPACES VECTORIELS NORMES

a) Normes

Def 1: Soit E un ev réel ou complexe. Une norme sur E est une application $\|.\|: E \to \mathbb{R}_+$ telle que:
i) $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$
ii) $\forall x\in E, \forall \lambda \in K, \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
iii) $\forall x,y\in E, \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$
Le couple $(E,\|.\|)$ est appelé evn.

Ex 2: . $(\mathbb{C},|.|)$ est un evn.
. Soit K compact, $\forall f\in \mathcal{C}(K,\mathbb{K})$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)|$ est une norme et $(\mathcal{C}(K,\mathbb{K}),\|.\|_\infty)$ est un evn.

Rmq 3: Soit E un $\mathbb{K}$-ev normé. En notant $d(x,y)=\|x-y\|$ on fait de E un espace métrique.

Prop 4: L'application $x\mapsto \|x\|$ est continue.

Def 5: Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur E sont dites équivalentes si il existe deux réels strictement positifs k et k' tq:
$\forall x\in E, \|x\| \leq k\|x\|'$ et $\forall x\in E, \|x\|' \leq k'\|x\|$

Ex 6: Soit $x:=(x_1,\dots,x_n)\in K^n$.
$\|x\| = (|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2)^{1/2}$; $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$; $\|x\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]}(|x_i|)$
Ces trois normes sont équivalentes.

C-ex 7: Soit $E=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$. On note:
$\forall f\in E$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$
$\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

Prop 8: Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur E sont équivalentes si et seulement si Id_E est un homéomorphisme de $(E,\|.\|)$ sur $(E,\|.\|')$

Prop 9: Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont équivalentes si et seulement si elles définissent sur E la même topologie.

b) Applications linéaires continues

Dans cette partie $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ désignent deux evn.
On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Thm 10:
Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.
i) f lipschitzienne sur E
ii) f uniformément continue sur E
iii) f continue sur E
iv) f continue en 0
v) f est bornée sur la boule unité fermé de E
vi) f borné sur la sphère unité de E
vii) $\exists M\in\mathbb{R}^+, \forall x\in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$

C-ex 11: $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\forall f\in E$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$
L'application $u: E\to\mathbb{R},\ f\mapsto f(0)$ est une forme linéaire discontinue.

Prop 12: L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un ev noté $\mathcal{L}_c(E,F)$. L'application $\|.\|_{\mathcal{L}}$ définie sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ par: $\forall f\in\mathcal{L}_c(E,F)$, $\|f\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_E=1}\|f(x)\|_F$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$ appelée norme subordonnée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.

Ex 13: Soit $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ l'ev des applications continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme.
$\forall g\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ on définit φ_g tq
$\forall f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, $\varphi_g(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt$
On a alors $\|\varphi_g\| = \int_a^b |g(t)|dt$

C-ex 14: L'application $\|.\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définit par : $\|A\| = \sqrt{tr(A^*A)}$ est une norme matricielle non subordonnée.

App 15: Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ la suite vectorielle définit par : $X_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = AX_k$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Alors : $|||A||| < 1 \Rightarrow (X_n)$ converge.

Thm 16: Toutes les normes définies sur un même ev de dim finie sont équivalentes.

Coro 17 : Soit $(E, \|.\|)$ evn de dim finie. On :

1) $S(e_1, \dots, e_n)$ base de E alors l'application linéaire $\sigma : \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array}$ est un homéomorphisme.

2) $(E, \|.\|)$ est un Banach.

3) Toute application linéaire de E dans un evn est continue.

C-ex 18: On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sup_i |a_i|$

L'application linéaire $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array}$ n'est pas continue.

Coro 19: Dans un evn $(E, \|.\|)$ tout sev de dimension finie est fermé

Thm 20 (Riesz) : Soit $(E, \|.\|)$ evn, on a équivalence entre :

i) $\dim E < +\infty$ ii) E localement compact iii) $B_F(0,1)$ compacte

Coro 21: $(E, \|.\|)$ evn de dim finie. $A \subset E$. On a équivalence entre :

i) A compact ii) A est fermé borné dans E.

C-ex 22: $E = \mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ $B = \{P \in E, \|P\| \leq 1\}$ est fermé borné mais pas compacte.

II) ESPACES DE BANACH

a) Définition

Def 23: On dit qu'un evn est complet si toute suite de Cauchy converge. On appelle espace de Banach tout evn complet.

Prop 24: L'ensemble des formes linéaires continues sur E est un sev du dual de E, E^*. C'est un espace de Banach.

Ex 25: • $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^p$ est complet. En particulier $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ le sont.
• $\ell^2(\mathbb{K})$ est complet

Ex 26: (Riesz-Fischer) $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, L^p est un espace de Banach. } DVT 1

b) Lemme de Baire et ses conséquences

Lem 27: Soit X espace métrique complet et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fermés tq $\forall n \geq 1$, $Int(X_n) = \emptyset$ alors $Int\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n\right) = \emptyset$

Rmq 28: ce lemme est souvent utilisé sous la forme : X espace métrique complet non vide et (X_n) suite de fermés tq $\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n = X$ alors $\exists n_0$ tq $Int\, X_{n_0} \neq \emptyset$

Thm 29: (Banach-Steinhaus)

Soient E, F Banachs et $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continues de E dans F.

On suppose que $\forall x \in E$, $\sup_{i\in I} \|T_i x\| < +\infty$ alors $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$

App 30 Soit (f_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F qui cv simplement vers $f : E \to F$. Alors f linéaire continue

App 31: E_1 un Banach et E_2 un evn. Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire dont les applications partielles sont continues.

Alors B est continue sur $E_1 \times E_2$.

Thm 32: (Application ouverte)

Soient E et F deux Banach et T un opérateur linéaire continu et surjectif de E vers F. Alors $\exists c>0$ tq $B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1))$

Coro 33: Soient E, F Banach et T un opérateur linéaire continu et bijectif de E dans F. Alors T^{-1} est continu de F dans E.

App 34 (Thm d'isomorphismes de Banach)

Soient E, F deux Banach et $T: E \to F$ une application linéaire continue bijective. Alors T^{-1} est continue donc T est un isomorphisme

App 35: Soit E ev muni de deux normes telles que E soit complet pour chacune d'elles. Supposons que ces deux normes sont comparables, alors elles sont équivalentes.

Thm 36 (Graphe fermé)

Soient E, F Banach et $T: E \to F$ linéaire.
Si le graphe de T est fermé dans $E \times F$ alors T est continue.

C-ex 37: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ a un graphe fermé mais est discontinue.

III) ESPACES DE HILBERT

a) Préliminaires

Def 38: Un espace vectoriel H sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dit préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire.
Si un espace préhilbertien est complet pour la norme associée au produit scalaire, on dit que c'est un espace de Hilbert.

Ex 39: $\ell^2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$ muni de $\langle x,y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$ est un espace de Hilbert.

Prop 40: (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(H, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien alors $\forall x,y \in H$, $|\langle x,y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$

Rmq 41: cette inégalité permet de montrer l'inégalité triangulaire pour $\|.\| = \sqrt{\langle . , . \rangle}$ et donc que $\|.\|$ est une norme.

Prop 42 (Identité du parallélogramme)

Soit $(E, \|.\|)$ evn où E préhilbertien et $\|.\|$ est celle associée au produit scalaire. $\forall x,y \in E$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Rmq 43: la réciproque est vraie aussi : si $\|.\|$ vérifie cette égalité alors elle est issue d'un produit scalaire.

C-ex 44: les normes $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ ne sont pas issue d'un produit scalaire.

b) Théorème de la projection

Thm 45: Soit H Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé.
On a $\forall x \in H, \exists! z \in C, d(x,C) = \inf_{y \in C} \|x-y\| = \|x-z\|$
On note $p_C(x) := z$.
De plus, $\forall x \in H, \forall y \in C$, $y = p_C(x) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\langle x-y, z-y \rangle \leqslant 0$

$\Big\}$ DVT 2

Prop 46: L'application $p_C: H \to C$ est continue.
De plus $\forall x_1, x_2 \in H$, $\|p_C(x_1) - p_C(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\|$

Thm 47 (Thm de représentation de Riesz)

Soit H un Hilbert. $\forall \varphi \in H^*, \exists! y \in H$ tq $\varphi(x) = \langle x,y \rangle$, $\forall x \in H$

App 48: Soit H un Hilbert. $\forall T \in \mathcal{L}(H)$, il existe un autre opérateur noté T^* et appelé l'adjoint de T tq :
$\forall x,y \in H$, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$. De plus $\|T^*\| = \|T\|$