208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples

I/ Espaces vectoriels normés : Structure et morphismes

1) Structure d'espace vectoriel normé

Définition 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E toute application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit alors que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (evn).

Exemples 2 :

- Dans $\mathbb{R}^n$: $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$; $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)$; $\max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$
- Dans $\mathcal{E}^0([0,1],\mathbb{R})$: $\int_0^1 |f|$; $\sup_{[0,1]} |f|$
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\left(\mathrm{Tr}({}^tAA)\right)^{1/2}$

Propriété 3 : $\forall x, y \in E, \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$.

Remarque 4 : Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn. Alors $E\times F$ peut être muni des normes : $\max(\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F)$; $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$ ...

Propriété 5 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q \in [1,\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Soient $f \in \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X,\mathcal{A},\mu)$. Alors : $fg \in \mathcal{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$, et :

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\right)^{1/q}.$$

Corollaire 6 : $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)} := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathcal{L}^p$.

Définition 7 : $B(a,r) := \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$

$S(a,r) := \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$

Propriété 8 : $B(0,1)$ est convexe.

Corollaire 9 : Si $p \in]0,1[$, $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas une norme. (voir annexe)

Remarque 10 : Dans $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[p\to\infty]{} \|x\|_\infty$.

Propriété 11 : Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe compact, tel que $0 \in \mathring{C}$ et $C = -C$. Alors il existe $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1) = C$.

Remarque 12 : L'application $d : (x,y) \in E^2 \mapsto \|x-y\| \in \mathbb{R}$ est une distance sur E et induit une topologie sur celui-ci.

Définition 13 : On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $N(\cdot)$ sur E sont équivalentes ssi elles induisent la même topologie. On note $\|\cdot\| \sim N$.

Propriété 14 : $\|\cdot\| \sim N$ ssi $\exists a, b > 0, \; a\|\cdot\| \leq N(\cdot) \leq b\|\cdot\|$.

Exemples 15 :

- Dans $\mathbb{R}^n$: $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|\cdot\|_\infty$
- Dans $\mathcal{E}^0([0,1],\mathbb{R})$: $\int_0^1 |f| + |f(0)| \sim \max\left(\int |f|, |f(0)|\right)$
- Sur $E\times F$: $\|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F \sim \max(\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F)$

Contre-exemple 16 :

- Dans $L^\infty(0,1)$: $\|\cdot\|_{L^1(0,1)} \not\sim \|\cdot\|_{L^\infty(0,1)}$

Propriété 17 : Dans un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel, toutes les normes sont équivalentes.

Corollaire 18 : Soit F sev de $(E, \|\cdot\|)$ evn. Alors $\dim F < \infty \Rightarrow F$ fermé dans E.

Lemme 19 : (De Riesz) Soit $F \subset E$ sev fermé d'un evn. Alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists u \in S(0,1), \; d(u,F) \geq 1-\varepsilon$.

Théorème 20 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Alors : $(\dim E < \infty) \Leftrightarrow$ (Les compacts de E sont les fermés bornés) $\Leftrightarrow$ ($\overline{B}(0,1)$ est compacte).

2) Morphismes pour cette structure

Définition 21: Une application $f : E \to F$ entre deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ est appelée isométrie ssi :
$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E .$$
On dira qu'un evn $(E, \|\cdot\|_E)$ s'identifie à $(F, \|\cdot\|_F)$ s'il existe une isométrie linéaire bijective $f : E \to F$.

Exemple 22:
- $\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto x + a \end{array}$ est une isométrie.
- $\begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \tau_a f \end{array}$ est une isométrie.

Définition 23:
- $L(E,F) := \{ f : E \to F \text{ linéaire} \}$
- $\mathcal{L}(E,F) := \{ f \in L(E,F) \text{ continue} \}$

Propriété 24: $f \in L(E,F)$ est continue sur E
ssi f est continue en 0
ssi $\exists C > 0, \ \|f(x)\|_F \leq C \|x\|_E \ \forall x \in E$.

Corollaire 25: $id : (E, \|\cdot\|) \to (E, N(\cdot))$ homéo ssi $\|\cdot\| \sim N$.

Exemples 26:
- $\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} \mapsto \binom{y}{x} \end{array}$ et $\begin{array}{l} T : L^2(0,1) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 f \end{array}$ sont continues.
- $\begin{array}{l} T : (\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_{L^1(0,1)}) \to \mathbb{R} \\ f \longmapsto f(0) \end{array}$ n'est pas continue.

Définition 27: On munit l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$, pour $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des evn, d'une structure d'evn avec la norme suivante :
$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$$

Propriétés 28:
- $\forall x \in E, \forall f \in \mathcal{L}(E,F), \ \|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E$.
- $\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall g \in \mathcal{L}(F,G), \ \|g \circ f\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|g\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$
- $\|Id\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

Remarque 29: En dimension finie, $\mathcal{L}(E,F) = L(E,F)$. $(\dim E < \infty)$

Exemple 30: On note $|||A|||_p = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Alors :
- $|||A|||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
- $|||A|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
- $|||A|||_2 = \rho(AA^*)^{\frac{1}{2}}$

Propriété 31: $|||A|||_p = |||{}^tA|||_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 32: $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Remarque 33: Si $\dim E < \infty$, alors E et E' sont homéomorphes, mais pas isométriques en général.

Contre-exemple 34: $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)' \simeq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty) \not\simeq (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$

Théorème 35: Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, et $F \subset E$ sev. Soit $\varphi \in F'$. Alors il existe $\psi \in E'$ tel que :
- $\psi_{|F} = \varphi$
- $\|\psi\|_{E'} = \|\varphi\|_{F'}$

Corollaire 36: $\begin{array}{l} ev : E \to E'' \\ x \mapsto ev_x : \begin{array}{l} E' \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array} \end{array}$
est une isométrie.
Lorsque ev est surjective, on dit que E est réflexif, et on a alors $E \simeq E''$.

Théorème 37: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E réflexif.
On a : $\|{}^tf\|_{\mathcal{L}(E')} = \|f\|_{\mathcal{L}(E)}$
où $\begin{array}{l} {}^tf : E' \to E' \\ \varphi \mapsto \varphi \circ f \end{array}$.

DEV 1

II/ Qualités d'un evn

1) Complétude

Définition 38 : Un evn complet est appelé espace de Banach.

Exemple 39 : . Tout evn de dimension finie est complet.
. $L^p(\mathbb{R})$ est complet.
. Si F est complet, $\mathcal{L}(E,F)$ est complet.
. E' est complet.

Contre-exemple 40 : Aucun espace de dimension algébrique dénombrable n'est complet. ($\mathbb{R}[X]$ par exemple)

Propriété 41 : $(E, \|\cdot\|)$ complet ssi $\left(\sum_{n\geq 0} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0} x_n \text{ CV}\right)$

Théorème 42 : Soit $D \subset (X, d_X)$ partie dense d'un espace métrique. Soit (Y, d_Y) un espace métrique complet.
Soit $f : D \to Y$ uniformément continue.
Alors il existe une unique $\tilde{f} : X \to Y$ $\mathcal{C}^0$ tq $\tilde{f}_{|D} = f$.

Application 43 : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ s'étend en une isométrie $L^2 \to L^2$.

DEV2

Corollaire 44 : Soit $N : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ tq :
. $N(a,b) = 0$ ssi $a = b = 0$
. $N(na, nb) = |n| N(a,b)$
. $N(a+c, b+d) \leq N(a,b) + N(c,d)$
Alors $\exists! \tilde{N} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ norme tq $\tilde{N}_{|\mathbb{Z}^2} = N$.

Théorème 45 : Soit $f : E \to F$ bijection linéaire continue, avec E et F deux banach.
Alors f^{-1} est continue.

Corollaire 46 : Soient $\|\cdot\|$ et N deux normes sur E qui en fassent un Banach, et tq $\|\cdot\| \leq C N(\cdot)$.
Alors $\|\cdot\| \sim N$.

2) Caractère Hilbertien

Définition 47 : On dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ est un produit scalaire (p.s) sur E ssi : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Exemple 48 : Sur $\mathbb{R}^n$: $\sum_{i=1}^n x_i y_i$; Sur $L^2(0,1)$: $\int_0^1 f\bar{g}$
Sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$; Sur $\mathbb{R}[X]$: $\sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(0) Q^{(n)}(0)$

Propriété 49 : $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

Corollaire 50 : Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un p.s., alors $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme.

Remarque 51 : . $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ $(*)$
. $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle$ (dans $\mathbb{R}$)
$\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire ssi $(*)$.

Définition 52 : $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert ssi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un p.s. et si H est complet pour celui-ci.

Exemple 53 : $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ muni de $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g} =: \langle f, g \rangle$ est un hilbert.

Théorème 54 : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ hilbert.
H séparable ssi $\exists (e_n) \in H^{\mathbb{N}}$ orthonormée tq $\forall x \in H$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n = x$.
Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$.

Exemple 55 : $\gamma : L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie bijective.
$f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$

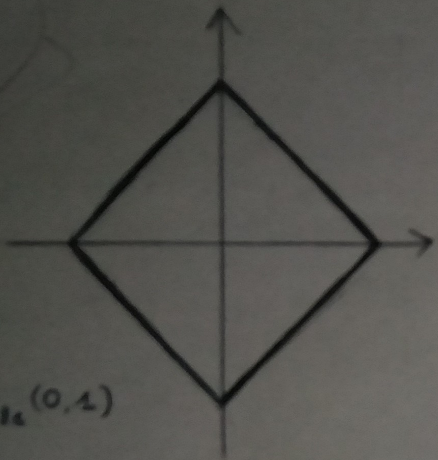
Corollaire 56 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Théorème 57 : $\gamma : H \to H'$ est une isométrie bijective
$a \mapsto \langle a, \cdot \rangle$

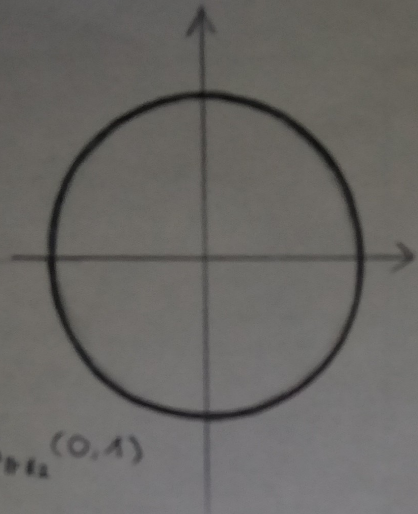
Corollaire 58 : Soit $f \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que : $\forall x, y \in H$, $\langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.
On a alors : $\|f\|_{\mathcal{L}(H)} = \|f^*\|_{\mathcal{L}(H)}$
De plus, le diagramme suivant commute : ie $\gamma \circ f^* = {}^t f \circ \gamma$.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\gamma} & H' \\ \downarrow f^* & & \downarrow {}^t f \\ H & \xrightarrow[\gamma]{} & H' \end{array}$$

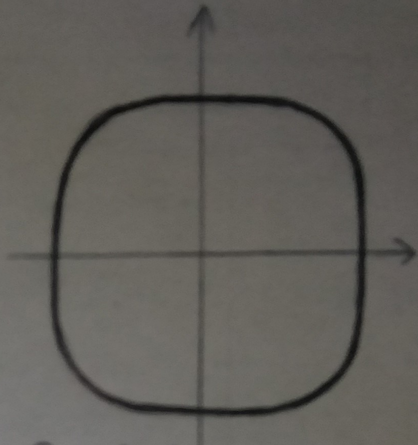
Dans $\mathbb{R}^2$:



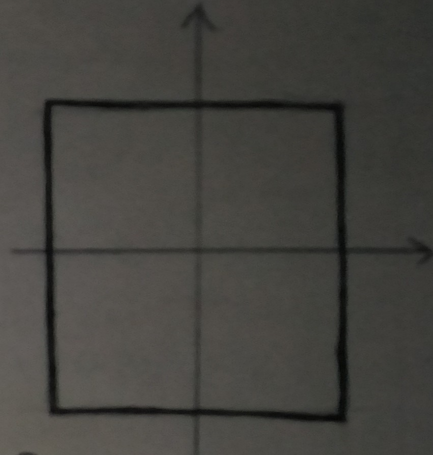
$B_{\|\cdot\|_1}(0,1)$



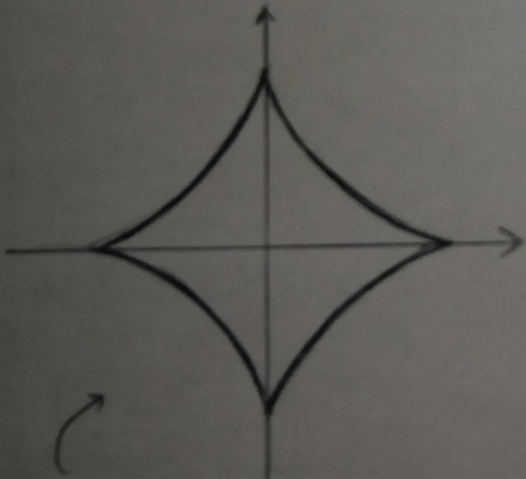
$B_{\|\cdot\|_2}(0,1)$



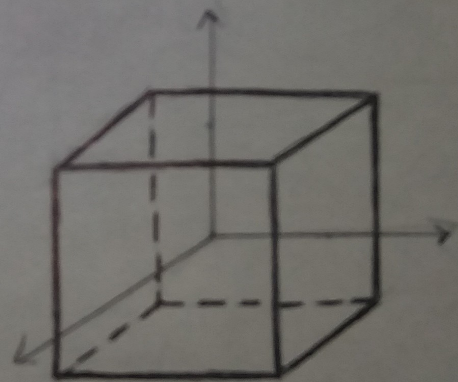
$B_{\|\cdot\|_4}(0,1)$



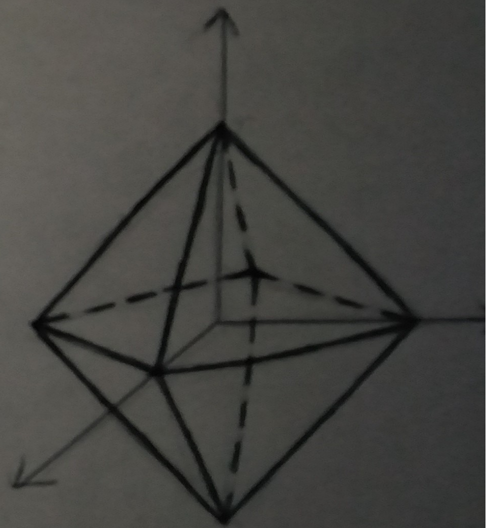
$B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)$



$\left\{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \left(|x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2}\right)^2 < 1\right\}$



8 points extrêmaux



6 points extrêmaux