# 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues, exemples

## I - Normes et applications linéaires continues

### A - Définitions d'une norme et de normes équivalentes

On considère $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

① Définition : Une norme est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés de séparation, d'absolue homogénéité et de sous-additivité. Dans ce cas $E$ est dit normé.

② Exemples : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$, $\|x\|_\infty = \max_{i=1} |x_i|$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ ; $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ sur $C([0,1])$.

③ Remarque : Un espace vectoriel normé est métrique pour $d(x,y) = \|x-y\|$, donc topologique.

④ Définition : On dit que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont des normes équivalentes s'il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que $C_1\|\cdot\| \leq \|\cdot\|' \leq C_2 \|\cdot\|$.

⑤ Exemple : $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq n\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{K}^n$ donc sont équivalentes mais $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne le sont pas sur $C^0([0,1])$.

⑥ Remarque : Deux normes équivalentes définissent des distances équivalentes donc des mêmes topologies.

### B - Applications linéaires continues et normes subordonnées

On considère $E, F$ des espaces vectoriels normés et $T \in L(E,F)$.

⑦ Proposition : $T$ continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E, \|T(x)\| \leq C\|x\|$, de plus leur ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel.

⑧ Exemple : $\delta_0 : C^0([0,1]) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto f(0)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$ sur $C^0([0,1])$.

⑨ Corollaire : Dans ce cas, $\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$ est la plus petite constante parmi les $C$ de la proposition, de plus on a $\|T\| = \sup_{x \in \bar{B}(0,1)} \|T(x)\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|T(x)\|$.

⑩ Définition : Dans ce cas $\|T\|$ est appelée norme subordonnée de $T$.

⑪ Exemple : Dans $C_b(\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, $T : C_b(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$, $f \mapsto 3f - 2f\circ(id_{\mathbb{R}}+1)$ est continue linéaire de norme $5$.

⑫ Proposition : L'application $\mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}_+$, $T \mapsto \|T\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$, appelée norme subordonnée aux normes sur $E$ et $F$.

⑬ Exemple : Dans $M_n(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$, la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ est donnée par $\|A\|_\infty = \max_{i=1} \sum_{j=1} |a_{ij}|$.

### C - Différences entre dimensions finie et infinie

⑭ Lemme de Riesz : Soit $F$ sous-espace fermé de $E$ tel que $F \neq E$, et $\delta \in ]0,1[$, alors il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$, $d(x,F) \geq 1-\delta$.

⑮ Théorème de compacité de Riesz : $\bar{B}(0,1)$ compact si et seulement si $\dim(E) < +\infty$.

⑯ Corollaire : Si $\dim(E) = n < +\infty$ alors :
i. $E$ et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes. ii. Soit $F$ fermé borné, alors $F$ compact
iii. $E$ est complet. iv. Soit $F$ espace normé, alors $L(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$

⑰ Corollaire : Soit $F$ sous-espace de dimension finie de $E$, alors $F$ est fermé.

⑱ Remarque : Les résultats précédents peuvent être mis en défaut en dimension infinie.

⑲ Exemple : $C^1([0,1]) \to C^0([0,1])$ (muni de $\|\cdot\|_\infty$), $f \mapsto f'$ est linéaire mais pas continue.

⑳ Application : Si $\dim(E) < +\infty$, soit $\|\cdot\|$ une norme sur $E$, $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $E$ et $\|x\|_\infty = \max_{i=1} |x_i|$, alors $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

(21) Théorème : En dimension finie les normes sont équivalentes.

(22) Application : Pour montrer une convergence en analyse matricielle ou une différentiabilité en calcul différentiel en dimension finie, on peut travailler avec n'importe quelle norme.

## II - Cas particulier des espaces normés complets

### A - Les espaces de Banach

(23) Définition : On dit que $E$ est de Banach si $E$ est complet, de plus si $\|\cdot\|$ est issue d'un produit scalaire alors on parle d'espace de Hilbert.

(24) Exemple : Les espaces $L^p$ sont complets.

(25) Théorème : Si $F$ de Banach alors $\mathcal{L}(E,F)$ également.

(26) Corollaire : Les formes linéaires continues sur $E$ forment un espace de Banach $E^*$ appelé dual de $E$.

(27) Application : Si $E$ de Banach, soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E)^{\mathbb{N}}$ tel que $\sum\|T_n\|$ converge, alors $\sum T_n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.

(28) Définition : On dit que $T$ est un isomorphisme d'espaces normés si $T$ continue bijective d'inverse continue.

(29) Remarque : Dans ce cas, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall x \in E$, $\alpha\|x\| \leq \|T(x)\| \leq \beta\|x\|$

(30) Exemple : Si $E$ de Banach et $\|T\| < 1$ alors $id_E - T$ est un isomorphisme d'espaces normés et $(id_E - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n$

## B - Conséquences du théorème de Baire dans un espace de Banach

On considère $E$, $F$ des espaces de Banach.

31) Théorème de Baire : Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille de fermés d'intérieurs vides de $X$ espace métrique complet, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

32) Corollaire : Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille d'ouverts denses de $X$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans $X$.

33) Application : Un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable.

34) Exemple : L'espace des fonctions polynomiales sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme n'est pas de Banach car $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base algébrique dénombrable.

35) Théorème de Banach-Steinhaus : Soit $(T_i)_{i\in I}\in \mathcal{L}(E,F)^I$ tel que $\forall x\in E$, $\sup_{i\in I}\|T_i(x)\|<+\infty$, alors $\sup_{i\in I}\|T_i\|<+\infty$.

36) Application : Il existe $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ne coïncidant pas avec sa série de Fourier. DEV①

37) Corollaire : Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall x\in E$, $T_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} T(x)\in F$, alors $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|<+\infty$, $T\in\mathcal{L}(E,F)$ et $\|T\|\le\liminf_{n\to+\infty}\|T_n\|$.

38) Théorème de l'application ouverte : Soit $T\in\mathcal{L}(E,F)$ surjective, alors il existe $C\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $T(B(0,1))\supset B(0,C)$ donc $T$ est ouverte.

39) Corollaire : Théorème d'isomorphisme de Banach : Soit $T\in\mathcal{L}(E,F)$ bijective, alors $T^{-1}\in\mathcal{L}(F,E)$.

40) Application : La transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R})\longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

41) Théorème du graphe fermé : Soit $T\in L(E,F)$, alors $T$ continue si et seulement si le graphe de $T$ est fermé dans $E\times F$.

42) Remarque : La complétude est primordiale.

43) Exemple : L'application de l'exemple 19 admet un graphe fermé, donc $C^1([0,1])$ muni de la norme uniforme n'est pas complet.

## C - Cas particulier des espaces de Hilbert

On considère $H$ un espace de Hilbert.

44) Théorème de projection : Soit $C$ convexe fermé non vide de $H$ et $x\in H$, alors il existe un unique $p_C(x)\in C$ tel que $d(x,C)=\|x-p_C(x)\|$, de plus, pour $y\in H$, $y=p_C(x)$ si et seulement si $\forall z\in C$, $\mathrm{Re}(\langle x-y, x-z\rangle)\le 0$.

45) Corollaire : Dans ce cas $p_C : H\longrightarrow C$ est 1-lipschitzienne donc continue.

46) Théorème : Soit $F$ sous-espace fermé de $H$, alors $p_F\in\mathcal{L}(H,F)$ de norme 1 et pour $x,y\in H$, $y=p_F(x)\iff y\in F$, $x-y\in F^\perp$.

47) Corollaire : Soit $F$ sous-espace de $H$, alors $\overline{F}=H\iff F^\perp=\{0\}$.

48) Application : $C_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et $C^0([0,1])$ dans $L^2(0,1)$.

49) Théorème de représentation de Riesz : Soit $\varphi\in H^*$ alors il existe un unique $y\in H$ tel que $\forall x\in H$, $\varphi(x)=\langle x,y\rangle$ et $\|\varphi\|=\|y\|$.

50) Corollaire : Soit $T\in\mathcal{L}(H)$, alors il existe un unique $T^*\in\mathcal{L}(H)$, appelé adjoint de $T$, tel que $\forall x,y\in H$, $\langle T(x),y\rangle=\langle x,T^*(y)\rangle$ et $\|T\|=\|T^*\|$.

51) Application : Théorème de Lax-Milgram : Soit $B$ forme bilinéaire continue coercive sur $H$ et $L\in H^*$, alors il existe $u\in H$ tel que $\forall y\in H$, $B(u,y)=L(y)$, de plus si $B$ symétrique alors $u$ est caractérisé par $B(u,u)-2L(u)=\min_{x\in H}(B(x,x)-2L(x))$.

52) Exemple : Soit $f\in L^2(0,1)$ alors $[-u''+u=f,\ u(0)=u(1)=0]$ admet une unique solution faible $u\in H_0^1(0,1)$ et réalise le minimum de $J_F(v)=\frac{1}{2}\int_0^1(v^2+v'^2)-\int_0^1 fv$ sur $H_0^1(0,1)$.

53) Définition : On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $H$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormale et $\mathrm{Vect}(u_n, n\in\mathbb{N})$ dense dans $H$.

54) Exemple : Les $e_n : x\mapsto e^{inx}$ forment une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

55) Théorème : Il existe une base hilbertienne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $H$.

56) Corollaire : Soit $x\in H$, alors $x=\sum_{n=0}^{\infty}\langle x,u_n\rangle u_n$ et $\|x\|^2=\sum_{n=0}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2$.

# III - Etude d'opérateurs dans des espaces de Banach

## A - Opérateurs compacts auto-adjoints

57) Définition : On dit que $T\in\mathcal{L}(E,F)$ est compact si $\overline{T(B(0,1))}$ est compacte.

58) Exemple : Soit $K\in L^2([0,1]^2)$ et $T_K(f)(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$, alors $T_K$ est un opérateur compact sur $L^2(0,1)$.

(59) <u>Proposition</u> : Il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, appelé adjoint de $T$, tel que $\forall (x,\varphi) \in E \times F^*$, $\varphi(T(x)) = T^*(\varphi)(x)$ et $\|T^*\| = \|T\|$.

(60) <u>Remarque</u> : Dans un espace de Hilbert les deux notions d'adjoints coïncident grâce à l'isomorphisme isométrique entre $H$ et $H^*$.

(61) <u>Définition</u> : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, si $T^* = T$ alors on dit que $T$ est auto-adjoint.

(62) <u>Théorème (admis)</u> : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint compact, alors il existe une base hilbertienne de $H$ formée de vecteurs propres $e_n$ de $T$ associées aux $\lambda_n \in K$, et $\forall x \in H$, $T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$.

(63) <u>Remarque</u> : Il s'agit d'une généralisation du théorème spectral en dimension infinie mais la compacité de $T$ est primordial.

(64) <u>Exemple</u> : $T : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$, $f \longmapsto id_{\mathbb{R}} \times f$ est auto-adjoint mais n'a aucune valeur propre.

B - Opérateur transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$

(65) <u>Définition</u> : Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x \xi} d\xi$

(66) <u>Exemple</u> : Si $f(x) = e^{-\pi x^2}$ alors $\mathcal{F}(f) = f$.

(67) <u>Proposition</u> : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ linéaire continue de norme 1 et $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$.

(68) <u>Corollaire</u> : $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution.

(69) <u>Théorème d'inversion</u> : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors presque partout $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f) \circ -id_{\mathbb{R}})(x)$.

(70) <u>Corollaire</u> : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ est injective.

(71) <u>Lemme</u> : $A(\mathbb{R}) := \{ f \in L^1(\mathbb{R}), \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}) \}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$

(72) <u>Théorème de Plancherel</u> : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$. DEV 2

(73) <u>Corollaire</u> : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, alors presque partout $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi$.

(74) <u>Exemple</u> : Comme $\mathcal{F}(1\!\!1_{[-1,1]})(\xi) = \dfrac{\text{[illegible]}}{\pi \xi}$ presque partout, $\mathcal{F}\left( \dfrac{\sin(2\pi id_{\mathbb{R}})}{2\pi id_{\mathbb{R}}} \right) = \dfrac{1}{2} 1\!\!1_{[-1,1]}$.

(75) <u>Théorème</u> : Il existe une unique famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes, appelés de Hermite, de coefficients dominants $2^n$, de degrés $n$ et deux à deux orthogonaux pour $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) e^{-x^2} dx$.

(76) <u>Corollaire</u> : Les fonctions de Hermite $h_n(x) = (2^n \sqrt{\pi} n!) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ de vecteurs propres de $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ associés aux valeurs propres $(-i)^n$.

C - Espace de Sobolev $H^1(0,1)$ et équations différentielles

(77) <u>Définition</u> : On dit que $u \in L^2(0,1)$ admet une dérivée faible s'il existe $v \in L^2(0,1)$ tel que $\forall \varphi \in C_c^\infty(0,1)$, $\int_0^1 u \varphi' = -\int_0^1 v \varphi$.

(78) <u>Remarque</u> : Dans ce cas $v$ est unique, on le note $u'$, et on note $H^1(0,1) := \{ u \in L^2(0,1), u' \in L^2(0,1) \}$.

(79) <u>Exemple</u> : $(id_{\mathbb{R}} \times 1\!\!1_{[\frac{1}{2},1]})' = 1\!\!1_{[\frac{1}{2},1]}$.

(80) <u>Proposition</u> : $\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_2 + \langle u', v' \rangle_2$ définit un produit scalaire sur $H^1(0,1)$.

(81) <u>Corollaire</u> : $H^1(0,1)$ est un espace de Hilbert séparable.

(82) <u>Théorème</u> : Soit $u \in H^1(0,1)$, alors il existe un unique $\tilde{u} \in C^0([0,1])$ tel que $\tilde{u}_{|]0,1[}$ soit un représentant de $u$ et $\forall (x,y) \in ]0,1[^2$, $\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y u'(t) dt$.

(83) <u>Corollaire</u> : Théorème de Rellich-Kondrachov : L'injection $j : H^1(0,1) \longrightarrow C^0([0,1])$, $u \longmapsto \tilde{u}$ est un opérateur compact.

(84) <u>Définition</u> : $H_0^1(0,1) := \{ u \in H^1(0,1), \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0 \}$.

(85) <u>Proposition</u> : Inégalité de Poincaré : Soit $u \in H_0^1(0,1)$, alors $\|u\| = \langle u, u \rangle \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \|u'\|_2$, en particulier $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes sur $H_0^1(0,1)$.

(86) <u>Application</u> : Soit $T : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$, $f \longmapsto u_f$ avec $u_f$ solution de l'exemple 52, alors $T$ est un opérateur compact auto-adjoint, donc il existe une base hilbertienne de $L^2(0,1)$ formée de vecteurs propres de $T$.