209

Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

I] Polynôme de meilleure approximation

1) Cas général

[OA] 30-32

Déf 1: Soit $(F, \|\cdot\|)$ un evn, $\|\cdot\|$ est strictement convexe si $\forall x \neq y \in F$, $\|x\| = \|y\| \Rightarrow \forall t \in]0;1[$, $\|tx + (1-t)y\| < t\|x\| + (1-t)\|y\|$

Th 2: Soient $(F, \|\cdot\|)$ un evn et E un sev de dimension finie de F.
Alors $\forall x \in F$, $\exists x^* \in E \,/\, \|x - x^*\| = \inf_{y \in E} \|x - y\|$

De plus, si $\|\cdot\|$ est strictement convexe, il y a unicité de x^*

[X-GN] Alg 3 30

Ex 3: $F = \mathbb{R}[X]$, $E = \mathrm{Vect}(X, \dots, X^n)$, $\|\cdot\|$ issue de $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x) dx$

$$\inf_{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-x} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx = \inf_{P \in E} \|-1 - P\|^2 = \frac{1}{n+1}$$

[GO] 256

Déf 4: • Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \end{array}, c_k \in \mathbb{C} \right\}$

l'ensemble des polynômes trigonométriques d'ordre $\leq n$.

• Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p_{2\pi} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ mesurable}, 2\pi\text{-périodique}, \|f\|_p < +\infty \}$

[ZQ] 69

avec $\|f\|_{L^p_{2\pi}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$ et $\|f\|_{L^\infty_{2\pi}} = \sup\mathrm{ess} |f|$

[OA] 110

• Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, on appelle fonction poids $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$

On note $L^2(I, \rho) = \{ f : I \to \mathbb{C}, \text{ mesurable}, \|f\|_{L^2(I,\rho)} < +\infty \}$

avec $\|f\|_{L^2(I,\rho)} = \left(\int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx \right)^{1/2}$

Cor 5: Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, $\mathcal{P}_n \subset L^p_{2\pi}$, $\mathbb{C}_n[X] \subset L^2(I, \rho)$ et $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{C}_n[X_1, \dots, X_d] \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|_{\infty, K}$, pour toute fonction dans ces espaces, il existe un polynôme (trigonométrique) de meilleure approximation d'ordre n.

Cor 6: le cas d'égalité de l'inégalité de Minkowsky pour $1 < p < +\infty$ nous donne que $\|\cdot\|_{L^p_{2\pi}}$ et $\|\cdot\|_{L^2(I,\rho)}$ sont strictement convexes [B-P] 158

On a donc unicité du polynôme de meilleure approximation d'ordre n

Prop 7: On a également unicité dans $(\mathcal{C}([0;1], \mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^1([0;1])})$ [OA] 42

C-Ex 8: Mais pas dans $(L^1([-1;1]), \|\cdot\|_{L^1([-1;1])})$ car si $f \equiv \begin{cases} -1 \text{ sur } [-1;0[\\ 1 \text{ sur } [0;1] \end{cases}$ [CM] 21

$\forall \alpha \in [-1;1]$, $P \equiv \alpha$ réalise la meilleure approximation par un pol de degré 0

Déf 9: $g \in \mathcal{C}([a;b])$ équioscille sur $(k+1)$ points s'il existe $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ dans $[a;b] \,/\, |g(x_i)| = \|g\|_\infty$ et $g(x_{i+1}) = -g(x_i)$ [DEM] 40-42

Th 10: Pour $f \in (\mathcal{C}([a;b]), \|\cdot\|_\infty)$, le polynôme de meilleure approximation est l'unique polynôme P de degré $\leq n$ tel que $f - P$ équioscille sur au moins $(n+2)$ points de $[a;b]$.

Ex 11: $P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, X^{n+1} - P = 2^{-n} T_{n+1}$ où T_{n+1} $(n+1)$-ième pol. de Tchebychev
P polynôme de meilleure approximation uniforme d'ordre n de X^{n+1} sur $[-1;1]$ (1)

2) Cas hilbertien

Th 12: $L^2(I, \rho)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_I f \bar{g} \rho$ est un Hilbert [OA] 110

Prop 13: Il existe une unique suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonaux, tels que $d^\circ P_n = n$. [DEM] 51

Ex 14: • $I =]-\infty; +\infty[$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $P_n = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$ Pol. Hermite [OA] 111

• $I =]-1;1[$, $\rho(x) = 1$, $P_n = \frac{n!}{(2n)!} ([x^2 - 1]^n)^{(n)}$ Pol. Legendre

• $I =]-1;1[$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $P_n = 2^{1-n} T_n$ Pol. Tchebychev [DEM] 52

Prop 15: P_n possède n zéros distincts dans I

Prop 16: $\pi_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle}{\|P_k\|_2^2} P_k$ est le pol. de meilleure approx d'ordre n de f [OA] 111 112

Th 17: S'il existe $\alpha > 0 \,/\, \int_I e^{\alpha |x|} \rho(x) dx < +\infty$, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$
[OuPT]

Cor 18: $\|f - \pi_n\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ [OA] 109

[OA] 141 C-Ex 19: $I =]0;+\infty[$, $p(x) = x^{-\ln(x)}$

II] Approximation en norme $\|\cdot\|_{L^p_{2\pi}}$

1) Généralités

[GOU] 256 Rq 20: Soit $P=\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \in \mathcal{P}_n$ avec $c_k\in\mathbb{C}$ et $e_k : x\longmapsto e^{ikx}$

- Si $\forall k\in[\![0;n]\!]$, $a_k = c_k + c_{-k}$ et $b_k = i(c_k - c_{-k})$, on a $\forall x\in\mathbb{R}$

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$$

- $P\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\forall k\in[\![-n;n]\!]$, $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t)e^{-ikt}dt$

Déf 21: Soit $f\in L^1_{2\pi}$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n(f)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$

[GOU] 261 Ex 22: f paire, 2π-périodique, tq $f(x)=1-\frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi;\pi]$

$b_k(f)=0$, $a_0(f)=\frac{4}{3}$ et $a_k(f) = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}$.

[ZQ] 71-73 Lemme 23: (Riemann-Lebesgue) $f\in L^1_{2\pi}$, $\lim_{|k|\to+\infty} c_k(f) = \lim_{k\to+\infty} a_k(f) = \lim_{k\to+\infty} b_k(f)=0$

Déf 24: $f,g\in L^1_{2\pi}$, $(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$

Rq 25: $\forall k\in\mathbb{Z}$, $f*e_k = c_k(f)e_k$

2) Convergence au sens de Cesàro

[ZQ] 75-77 Déf 26:
- $D_n=\sum_{k=-n}^{n} e_k$ Noyau de Dirichlet
- $K_n = \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n} D_n$ Noyau de Fejér
- Soit $f\in L^1_{2\pi}$, $\sigma_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_n(f)$ Somme de Fejér ou Cesàro

Rq 27: $S_n(f)=f*D_n$ et $\sigma_n(f)=f*K_n$

Prop 28: $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité, c'est-à-dire :

- $K_n \geq 0$ - $\|K_n\|_1 = 1$ - $\forall \delta\in]0;\pi[$, $\lim_{n\to+\infty}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} K_n(x)dx=0$

Th 29 (Fejér) Soit $f\in L^p_{2\pi}$, $1\leq p<+\infty$, $\|\sigma_n(f)\|_p\leq\|f\|_p$ et $\|\sigma_n(f)-f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ [ZQ] 84-86

Rq 30: $\sigma_n(f)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)c_k(f)e_k\in\mathcal{P}_n$

Cor 31: $\|S_n(f)-f\|_2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$ munie de $\langle f;g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g}$

III] Approximation d'une fonction régulière

1) Cas d'une fonction périodique

a) Convergence simple

Th 32: (Jordan-Dirichlet) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, 2π-périodique, $\mathcal{C}_m$ et $x\in\mathbb{R}$ / $h\longmapsto\frac{f(x+h)+f(x-h)-f(x^+)-f(x^-)}{h}$ soit bornée au voisinage de 0, alors $S_n(f)(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ [GOU] 260

Ex 33: Soit $\varepsilon\in]0;\pi[$, $f=\begin{cases}1 \text{ si } |t|\leq\varepsilon\\ 0 \text{ si } \varepsilon<|t|\leq\pi\end{cases}$ 2π-périodique [ZQ] 91

En particulier, $\forall 0<a<2\pi$, $\frac{\pi-a}{2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(ka)}{k}$

Cor 34: (Dirichlet) Soit $f\in\mathcal{C}^1_m$, 2π-périodique, alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $S_n(f)(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ [GOU] 261

C-Ex 35: Il existe $f\in\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ / $\sup_{n\geq1}|S_n(f)(0)|=+\infty$ [ZQ] 82

b) Convergence uniforme

Th 36: (Fejér) Soit $f\in\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\|\sigma_n(f)\|_\infty\leq\|f\|_\infty$ et $\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ [ZQ] 84-86

Cor 37: (Weierstrass trigo) $\forall f\in\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists n$ et $P\in\mathcal{P}_n$ / $\|P-f\|_\infty\leq\varepsilon$

Application 38: (Weyl) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[0;1]^{\mathbb{N}}$, $0\leq a\leq b\leq 1$ [XEN Ana 1 47]

$X_n(a,b) := \#\{k\in[\![1,n]\!],\ u_k\in[a;b]\}$, on a l'équivalence :

i) $\frac{X_n(a,b)}{n}\longrightarrow b-a$, $\forall(a,b)$ (suite équirépartie)

ii) $\forall f\in\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(u_k)=\int_0^1 f(t)dt$

iii) $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi p u_k}=0$

c) Convergence normale

[Gou] 261 **Th 39**: Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\mathcal{C}^1_m$, alors $S_n(f)$ converge normalement vers f

[XENS] Ana 4 49 **Application 40**: (éq. chaleur) $u_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0_{2\pi}$, $\mathcal{C}^1_m$
$\exists! \, u : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et tq $\forall t\geq 0$, $x\mapsto u(t,x)$ 2π-périod
solution de $\left\{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right.$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $u(0,x)=u_0(x)$

[Zq] 98 **Prop 41**: Soit $f\in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $f\in\mathcal{C}^p \Rightarrow \lim_{|n|\to+\infty} n^p c_k(f) = 0$

Ex 42: $f\in\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $f\in\mathcal{C}^p$, $p\geq 2$, $\|S_n(f)-f\|_\infty \leq C\times\frac{1}{p-1}\times\frac{1}{n^{p-1}}$

2) Cas d'une fonction définie sur un compact

Th 43: (Bernstein) Soit $f\in\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{C})$, $\omega(h)=\sup\{|f(u)-f(v)|;\ |u-v|\leq h\}$

[Zq] 518 $B_n := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$, alors $\exists C>0$ / [DVPT]

$$\|B_n - f\|_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Rq 44: • Cette estimation est optimale : $\exists f\in Lip([0;1],\mathbb{C})$, $\exists \delta>0$ / $\|B_n f\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$

[Zq] 88 • $P_n := c_0(f) + 2\sum_{k=1}^n \left(1-\frac{k}{n}\right)c_k(f)T_k$ où T_k k-ième pol de Tchebychev, converge uniformément vers f grâce à Fejér.

[Gou] 289 **Application 45**: (Hardy-Littlewood) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ / $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \ell\in\mathbb{R}$, alors $\sum b_n$ converge, sa somme vaut ℓ

[HL] 30 **Th 46**: (Weierstrass) $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d]$ dense dans $(\mathcal{C}(K,\mathbb{C}), \|\cdot\|_{\infty,K})$, K compact de $\mathbb{R}^d$

[CL] 178 **Application 46**: (Brower)
B boule unité de $\mathbb{R}^d$, $f: B\to B$ continue, alors f admet un point fixe

[Gou] 74 **Th 47**: (Taylor-Lagrange)
Soit $f\in\mathcal{C}^n([a;b],\mathbb{C})$, $(n+1)$-fois dérivable sur $]a;b[$.
S'il existe $M>0$ / $\forall t\in]a;b[$, $|f^{(n+1)}(t)|\leq M$, alors

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

IV / Approximation d'une fonction numérique

1) Méthodes d'interpolation

Th 48: Soit $f\in\mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$, $x_0,x_1,\dots,x_n\in[a;b]$ 2 à 2 distincts [DEM] 22-24
$\exists! P_n\in\mathbb{R}_n[X]$ / $P_n(x_i)=f(x_i)$, $\forall i$. Il est caractérisé par
$P_n = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i$ où $L_i = \prod_{j\neq i}\frac{(X-x_j)}{(x_i-x_j)}$ (pol d'interpolation de Lagrange)

Th 49: Soit f $(n+1)$ fois dérivable sur $[a;b]$, alors

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty \quad \text{où } \pi_{n+1}=\prod_{i=0}^n(X-x_i)$$

Rq 50: L'erreur d'interpolation dépend de la répartition des points d'interpolation ($\|\pi_{n+1}\|_\infty$) et des oscillations de f ($\|f^{(n+1)}\|_\infty$)

Déf 51: $L_n : \mathcal{C}([a;b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $f \longmapsto P_n$ opérateur d'interpolation de Lagrange [DEM] 46-50

Prop 52: • $\Lambda_n := |||L_n||| = \sup_{x\in[a;b]} \left(\sum_{i=0}^n |L_i(x)|\right)$ constante de Lebesgue
• $\|L_n(f)-f\|_\infty \leq (1+\Lambda_n)\, d(f,\mathbb{R}_n[X])$

Prop 53: • Points équidistants : $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e\, n\ln(n)}$
• Points Tchebychev : $\Lambda_n\sim\frac{2}{\pi}\ln(n)$

Cor 54: Si $f\in Lip([a;b],\mathbb{R})$, $\|L_n(f)-f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour points de Tchebychev

Ex 55: Phénomène de Runge (cf Annexe 3)

2) Méthodes d'intégration

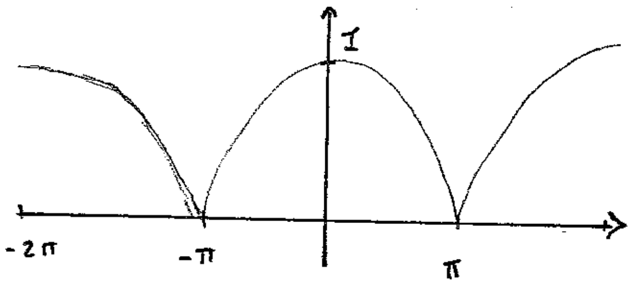
Déf 56: Soit $f\in\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$, $P_n=\sum_{i=0}^n f(x_i)L_i$ où x_i équidistants ds $[-1;1]$ [DEM] 62
Méthode de Newton-Cotes de rang n :

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \simeq \int_{-1}^1 P_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) \quad \text{où } \omega_i=\int_{-1}^1 L_i(x)\,dx$$

Annexe 1.

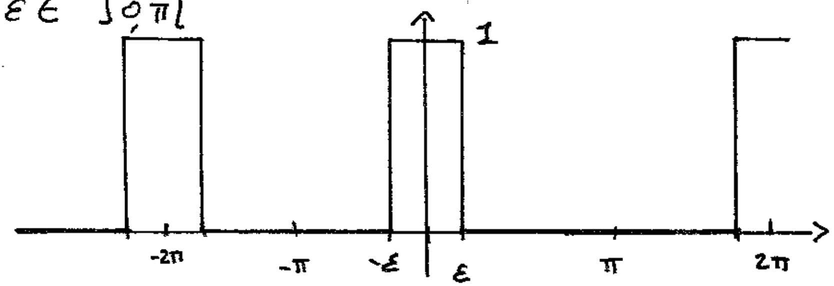
f paire 2π-périodique

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$

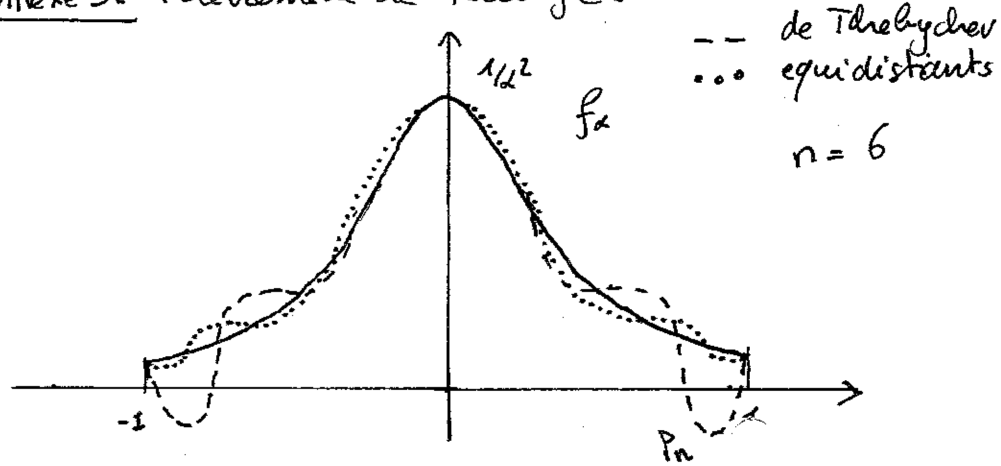


Annexe 2. Fonction Créneau.

$\varepsilon \in \left]0, \pi\right[$



Annexe 3. Phénomène de Runge.



Prop 57: Si n pair, méthode d'ordre $n+1$ (exacte $\forall f \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$)
n impair, " " n [DEM] 63

Rq 58: On peut se poser le problème inverse de trouver w_i et x_i tels que la méthode (dite de Gauss) $\int_a^b f(x)\rho(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ soit d'ordre maximal

Th 59: Les racines du $(n+1)$-ème polynôme orthogonal $(x_0, \dots, x_n)$ et les coefficients $\lambda_i = \int_a^b \ell_i(x)\rho(x)dx$, où $\ell_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$, sont les seuls paramètres permettant d'avoir une méthode d'ordre maximal égal à $2n+1$. [DEM] 73

Références :

[O-A] Objectif Agrégation.

[X-Ens] Oraux X-Ens, Algèbre 3, Analyse 2-4

[GOU] X. Gourdon, Analyse

[Z-Q] Zuily-Queffélec. Analyse pour l'agrégation

[B-P] Briane-Pagès. Théorie de l'intégration

[C-M] M. Crouzeix - Al. Mignot - Analyse numérique des équations différentielles.

[DEM] J.P. Demailly. Analyse numérique et Equa diff.

[H-L] F. Hirsch, G. Lacombe - Éléments d'analyse fonctionnelle.

[C-L] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, Analyse 3. Exercices de Math pour l'agrégation