209

Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

I) Approximation locale

[GOU]

A) Formules de Taylor

Thm 1 : (Taylor-Lagrange) $f \in C^n([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[$,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

App : Avec $0 \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$, on a $\exists \theta \in]0,1[$,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

Thm 2 : $F : [a,b] \longrightarrow E$ un $\mathbb{R}$-ev normé, de classe C^n sur $[a,b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in]a,b[$ $\|F^{(n+1)}(t)\| \leq M$, alors

$$\left\| F(b) - F(a) - (b-a)F'(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} F^{(n)}(a) \right\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Thm 3 : (Taylor-Young) $F \in C^n(I, E)$, E $\mathbb{R}$-evn, $I \subset \mathbb{R}$ intervalle. Soit $a \in I$ tel que $F^{(n+1)}(a)$ existe. Alors

$$F(a+h) \underset{h \to 0}{=} F(a) + hF'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$$

Thm 4 : (Taylor avec reste intégral) $F \in C^{n+1}([a,b], E)$ E $\mathbb{R}$-espace de Banach. Alors $F(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} F^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)dt$

B) Développements limités

Def 5 : $I \subset \mathbb{R}$, intervalle $\neq \{pt\}$, E $\mathbb{R}$-evn, $f : I \to E$, $0 \in I$. f admet un développement limité à l'ordre $n \geq 0$ au voisinage de 0 si $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré $\leq n$

ex $e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(1+x)^\alpha \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

$\tan(x) \underset{x \to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$

App : résolution de forme indéterminée : $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\tan x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\tan x - x}{\sin x - x} = -2$

• études de suites récurrentes $\begin{cases} u_0(x) = x \in [0, \pi] \\ u_{n+1}(x) = \sin u_n(x) \end{cases}$ $u_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$ $\forall x \in [\alpha, \pi - \alpha]$ $\forall \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ [C-L]

C) Développement en série entière

Def 6 : (rayon de convergence) Pour $\sum a_n z^n$, c'est le nombre $R = \sup\{r \geq 0 \ / \text{ la suite } (|a_n| r^n)_n \text{ est bornée}\}$.

ex $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ $R = 1$

Def 7 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $f : \mathbb{K} \to \mathbb{C}$ définie dans un voisinage de 0 est développable en série entière (DSE) si sur ce voisinage f coïncide avec la somme d'une série entière.

ex $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour $|x| < 1$

[GOU]

Prop 8 : Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0. $f\in C^\infty(I,\mathbb{C})$ est DSE_0 ssi $\exists \alpha>0 / R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ CV simplement vers 0 sur $]-\alpha,\alpha[$. $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$ a un rayon de convergence $\geq\alpha$ et f est égale à la somme de cette série sur $]-\alpha,\alpha[$.

$\boxed{\text{C-ex}}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto e^{-1/x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$, C^∞ sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(0)=0$ $\forall n$

Thm 9 : (Bernstein) $a>0, I=]-a,a[$, $f\in C^\infty(I,\mathbb{R})$ telle que $\forall k\in\mathbb{N}, \forall x\in I, f^{(2k)}(x)\geq 0$. Alors f DSE_0 sur $]-a,a[$.

App : $\tan$ est DSE_0

ex calcul d'exponentielle de matrice : $\exp\left(t\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\cos(t)&\sin(t)\\-\sin(t)&\cos(t)\end{pmatrix}$

II) Autour des théorèmes de Stone-Weierstrass

Dans cette partie, (X,d) désigne un espace métrique compact non vide

A) Cas réel

[H-L]

Thm 10 : (Stone-Weierstrass réel) Toute sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

Cor 11 : $X\subset\mathbb{R}^d$, $H=\{x\mapsto P(x), P\in\mathbb{R}[X_1,\dots,X_d]\}$ est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

Cor 12 : $d=1$, et $X=[a,b]$ c'est le théorème de Weierstrass.

[GOU]

App : Thm taubérien d'Hardy-Littlewood : $(b_n)\in\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$, $b_n=O(\frac{1}{n})$ et si $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n=l$, alors $\sum b_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n=l$.

[H-L], [GOU]

Méthode constructive : (polynômes de Bernstein)

Thm : $f\in C([0,1],\mathbb{R})$, $n\geq 1$, $B_n(f):x\mapsto\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}$

[QZ] pour

$(B_n(f))_n$ CV uniformément vers f. $\boxed{\text{DVP}}$

B) Cas complexe

Thm 13 : (Stone-Weierstrass complexe) Toute sous-algèbre de $C(X,\mathbb{C})$, séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $C(X,\mathbb{C})$.

Cor 14 : $X\subset\mathbb{C}^d$, $H=\{z\mapsto P(z,\bar{z}), P\in\mathbb{C}[X_1,\dots,X_d,Y_1,\dots,Y_d]\}$ est dense dans $C(X,\mathbb{C})$.

C-ex : $d=1$, $H=\{z\mapsto P(z), P\in\mathbb{C}[X]\}$ ne suffit pas. $X=\mathbb{U}$, H est séparante et contient les constantes, mais $\overline{Z}:z\mapsto\bar{z}\notin\overline{H}$ mais $\overline{Z}\in C(\mathbb{U},\mathbb{C})$.

Lemme 15 : $\begin{cases} C(\mathbb{U},\mathbb{C}) \longrightarrow C_{2\pi}^{\mathbb{C}} \\ \phi \longmapsto (f:\theta\mapsto\phi(e^{i\theta}))\end{cases}$ est une isométrie surjective.

Déf 16 : (polynôme trigonométrique de degré $\leq N$) c'est une fonction de la variable réelle $x\mapsto\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{inx}$ $(c_n\in\mathbb{C})$

Prop 17 : (Weierstrass trigonométrique) Les polynômes trigonométriques sont denses dans les fonctions 2π-périodiques.

Cor 18 : On note $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e_n:x\mapsto e^{inx}$, $n\in\mathbb{Z}$. $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ muni de $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$.

Application : analyse de Fourier

déf 19 : (coefficient de Fourier de f) $f\in L^2(\mathbb{T})$, $c_n(f)=\langle f,e_n\rangle$

déf 20 : $S_N(f):=\sum_{n=-N}^{N}c_n(f)e_n$ $\quad\sigma_N(f)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}S_n(f)$

[OA]

[QZ]

[OA]

Rq: $\sigma_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_n(f) e_n$

Thm 21 : (Fejér) : Pour f 2π-périodique, si

- f est continue, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.
- $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < +\infty$, alors $\|\sigma_N(f) - f\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.
- $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet en un point x_0 une limite à droite et à gauche, alors $\sigma_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{f(x_0)^+ + f(x_0)^-}{2}$

Rq: On peut d'abord montrer ce théorème et en déduire la densité des polynômes trigonométriques.

Thm 22 : (Dirichlet) $f \in L^1(\mathbb{T})$ et admet en un point x_0 une limite à droite et à gauche, et si $h \mapsto \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - f(x_0)^+ - f(x_0)^-}{h}$ est bornée au voisinage de 0, alors $S_N(f)(x_0) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{f(x_0)^+ + f(x_0)^-}{2}$

ex $\varepsilon \in]0,\pi[$, $f = \mathbb{1}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}$ 2π-périodique

En particulier, $\forall 0 < a < 2\pi$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}$

C-ex: Il existe $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ / $\sup_{n\geq 1} |S_n(f)(0)| = +\infty$.

Prop 23: Si $f \in C(\mathbb{T})$, f C^1_{morceaux}, alors $\sum c_n e_n$ cv normalement vers f. $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(x)$.

App: $f = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ 2π-périodique donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. [GOU]

App: résolution de l'équation de la chaleur sur un anneau :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle, continue, C^2_{morceaux}, 2π-périodique.

[OA]

III) Deux méthodes constructives

A) Cadre hilbertien

Thm 24: $L^2(I,\rho)$ muni de $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$ est un espace de Hilbert.

Prop 25: Il existe une unique suite de polynômes unitaires, étagés et orthogonaux pour $\langle\,,\,\rangle$. [OA]

ex $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ pol. Hermite

$I = [-1,1]$, $\rho(x) = 1$ $P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$ pol. Legendre

$I =]-1,1[$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $P_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \operatorname{Arccos}(x))$ pol. Tchebychev [OA]

Thm 26: S'il existe $\alpha > 0$ / $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$, $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

B) Interpolation

Thm 27: $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ 2 à 2 distincts, $\exists!\, P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ / $P_n(x_i) = f(x_i)$ $\forall i$. $P_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i$ où $l_i : x \mapsto \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Thm 28: Si f est $n+1$ fois dérivable sur $[a,b]$, alors $\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$ où $\pi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. [DEM]

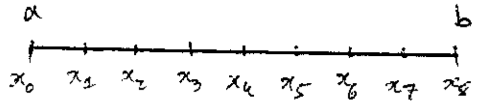
Prop 29: $\Lambda_n := \sup_{x\in[a,b]} \left(\sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|\right)$ $\|P_n - f\|_\infty \leq (1+\Lambda_n) d(f, \mathbb{R}_n[X])$

Prop 30: Points équidistants : $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e n \ln(n)}$

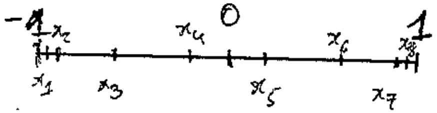
Points de Tchebychev : $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$ $0 \leq i \leq n$ $\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi}\ln(n)$

Annexe:

Points équidistants :



Points de Tchebychev :



[GOU] Gourdon Analyse

[C-L] Chambert-Loir Fermigier Analyse 1

[H-L] Hirsch-Lacombe Éléments d'analyse fonctionne

[QZ] Queffélec-Zuily

[DEM] Demailly

[OA] Objectif Agrégation

Développement : densité des polynômes orthogonaux

Hugo Martin

25 mars 2015

Référence : *Objectif agrégation*, BECK, MALICK, PEYRÉ pp 110-111 pour les notations et exemples, et pp 140-142 pour la preuve

1 Définitions et notations

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* $\rho : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathrm{I}} |x|^n \rho(x) \mathrm{d}x < +\infty \tag{1}$$
- On définit l'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \rho)$ des fonctions de carrés intégrables pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est à dire muni du produit scalaire
$$\langle f, g \rangle_\rho = \int_{\mathrm{I}} f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\mathrm{d}x.$$
- L'espace $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \rho)$ est un espace de Hilbert. Pour $p \in [1, \infty : [$, avec 1 tout polynôme appartient à $\mathrm{L}^p(\mathrm{I}, \rho)$, donc en particulier à $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \rho)$.
- Il existe une unique famille $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux pour $\langle , \rangle_\rho$ deux à deux tels que $\deg \mathrm{P}_n = n$.

2 Le théorème

Théorème : densité des polynômes orthogonaux

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\int_{\mathrm{I}} e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < +\infty$$
alors la familles des polynômes orthogonaux associés à ρ forme une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathrm{I}, \rho)$ pour la norme $\|.\|_\rho$

Démonstration : 1. **Réduction du problème**

La famille $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée, il reste donc à montrer que cette famille est totale, *id est* :

$$\overline{Vect((\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \mathrm{L}^2(\mathrm{I},\rho).$$

De plus, par construction, on a

$$Vect((\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}} = Vect((\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$(Vect((\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}})^{\perp} = 0.$$

On considère donc $f \in \mathrm{L}^2(\mathrm{I},\rho)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \langle f, X^n\rangle = 0$$

et on cherche à montrer que $f = 0$ dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{I},\rho)$.

2. **Étape essentielle en analyse : poser la bonne fonction**
Soit φ la fonction définie par

$$\forall \in \mathbb{R}\, \varphi(x) = f(x)\rho(x)\mathbb{1}_{\mathrm{I}},$$

et montrons que φ est une fonction de $\mathrm{L}^1(\mathrm{I},\rho)$. Pour tout $t \geqslant 0$, on a $t \leqslant (1+t^2)/2$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ |f(x)|\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x)\ ^1.$$

Comme ρ et $f^2\rho$ sont intégrables sur I, on en déduit que $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. On peut donc considérer la transformée de Fourier :

$$\forall \zeta \in \mathbb{R},\ \hat{\varphi} = \int_{\mathrm{I}} f(x)e^{-i\zeta x}\rho(x)\mathrm{d}x.$$

3. **Prolonger $\hat{\varphi}$ en une fonction holomorphe sur la bande $\mathrm{B}_\alpha = \{z \in \mathbb{B}, |\Im z| < \alpha/2\}$**
Posons $g(z,x) = e^{-izx}f(x)\rho(x)$. Pour $z \in \mathrm{B}_\alpha$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{I}} |g(z,x)|\mathrm{d}x &= \int_{\mathrm{I}} e^{x\Im(z)}|f(x)|\rho(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_{\mathrm{I}} e^{\alpha|x|/2}|f(x)|\rho(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_{\mathrm{I}} e^{\alpha|x|/2}\sqrt{\rho(x)}|f(x)|\sqrt{\rho(x)}\mathrm{d}x\\ &\leqslant \underbrace{\left(\int_{\mathrm{I}} e^{\alpha|x|}\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}_{<+\infty}\underbrace{\left(\int_{\mathrm{I}} |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}}_{<+\infty}\end{aligned}$$

La dernière estimation est obtenue via l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi $x \mapsto g(z,x)$ est intégrable, on considère alors la fonction F définie par

$$\forall z \in \mathrm{B}_\alpha,\ F(z) = \int_{\mathrm{I}} g(z,x)\mathrm{d}x.$$

Montrons, *via* le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale que F est holomorphe :

1. On aurait aussi pu appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ aux fonctions $x \mapsto 1$ et $g = |f|$.

- Pour tout $z \in B_\alpha$, l'application $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
- Pour presque tout $x \in I$, l'application $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe.
- Pour tout $z \in B_\alpha$, pour presque tout $x \in I$, on a

$$|g(z,x)| \leqslant \underbrace{e^{\alpha|x|/2}|f(x)|\rho(x)}_{\text{indépendant de } z \text{ et intégrable sur I}}$$

Ainsi, en vertu du théorème sus-cité, F est holomorphe sur B_α.

4. **F est identiquement nulle sur B_α**
Le théorème précédemment utilisé donne également une expression des dérivées de F :

$$\begin{aligned} \forall z \in B_\alpha, \forall n \in \mathbb{N},\ F^{(n)}(z) &= \int_I \frac{\partial^n g}{\partial z^n}(z,x)\mathrm{d}x \\ &= \int_I (-i)^n x^n g(z,x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} F^{(n)}(0) &= (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\mathrm{d}x \\ &= (-i)^n \langle f, X^n\rangle_\rho = 0. \end{aligned}$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que F est identiquement nulle sur un voisinage de 0. De plus, comme B_α est connexe, d'après théorème de prolongement analytique, F est nulle sur tout l'ensemble B_α, donc en particulier sur l'axe réel. Ainsi, $\hat{\varphi}$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. Comme φ est une fonction intégrable, l'injectivité de la transformée de Fourier implique $\varphi = 0$. Comme $\rho(x) > 0$, on en déduit $f(x) = 0$ pour presque tout x de I. ■

3 Exemples et contre-exemple

Premier exemple : les polynômes de Hermite

Ici l'intervalle est $I = \mathbb{R}$ et le poids $\rho(x) = e^{-x^2}$. Les polynômes P_n sont

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}).$$

Second exemple : les polynômes de Legendre

Ici l'intervalle est $I = [-1,1]^2$ et le poids $\rho(x) = 1$. Les polynômes P_n sont

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \frac{n!}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(((x^2-1)^n)).$$

Contre-exemple

$I =]0, +\infty[$, $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$. On note $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$. Alors la fonction f est non nulle mais dans l'orthogonal de tous les polynômes.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi u) e^{-(u^2-(n+1)u)} \mathrm{d}u \\ &= e^{\frac{n+1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi v) e^{-v^2} \mathrm{d}u \\ &= 0\end{aligned}$$

car l'intervalle est symétrique et la fonction impaire. ■

Développement : le théorème de Weierstrass *via* les polynômes de Bernstein

Hugo Martin

25 mars 2015

Référence : *Analyse pour l'agrégation*, 4eme édition, Queffélec, Zuily pp 518-519 pour la preuve en elle-même, p 517 pour la loi des grands nombres faible, et p 114 pour l'inégalité sur le module de continuité.

Théorème

Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ une fonction contniue, ω son module de continuité uniforme, i.e $\omega(h) = \sup\{|f(u)-f(v)|; |u-v| \leq h\}$. Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{b} x^k(1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n})$, le n-ième polynôme de Bernstein de f. Alors :

1. B_n converge vers f uniformément sur $[0,1]$.
2. Plus précisément, on a $\|f - B_n\|_\infty \leq C\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$, où C est une constante numérique.
3. L'estimation de 2) est optimale : il existe une fonction lipschitzienne f pour laquelle $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, où δ est une constante numérique.

Démonstration : 1) Soient $x \in [0,1]$, X une loi de Bernoulli de paramètre x, $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de X et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Comme S_n suit une loi binômiale, on a que $\mathbb{E}[f(\frac{S_n}{n})] = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{b} x^k(1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n}) = B_n(x)$ est une polynôme en x. En désignant par $\|.\|_\infty$ la norme infinie sur $[0,1]$, fixons $\delta \in [0,1]$; nous avons que $f(x) - B_n(x) = \mathbb{E}\Big[f(x) - f(\frac{S_n}{n})\Big]$, d'où $\Big|f(x) - B_n(x)\Big| \leq \mathbb{E}\Big[|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|\Big]$. Or $\Big|f(x) - f(\frac{S_n}{n})\Big| \leq \omega(\delta)$ si $|x - \frac{S_n}{n} \leq \delta$, et $\leq 2\|f\|_\infty$ si $|x - \frac{S_n}{n}| > \delta$, d'où

$$\mathbb{E}\Big[\Big|f(x) - f(\frac{S_n}{n})\Big|\Big] \leq \omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{(|x - \frac{S_n}{n}| > \delta)}\Big]$$

Par définition de la probabilité d'un évènement, le terme de droite de l'inégalité de se réécrit :

$$\omega(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\Big(\Big|x - \frac{S_n}{n}\Big| > \delta\Big) \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$$

La dernière inégalité résulte de la Loi faible des Grands Nombres. Il en résulte que $\|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$ puis que $\overline{\lim} \|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta)$. Or, $\omega(\delta) \mapsto 0$ quand $\delta \mapsto 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - B_n\|_\infty = 0$

2) On utilise une inégalité sur le module d'uniforme continuité : Si $h \in [0,1]$ et $\lambda h \in [0,1]$, alors $\omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$.

En particulier : $\omega\Big(\big|x - \frac{S_n}{n}\big|\Big) \leq \Big(\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}| + 1\Big)\omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Or nous savons que $|f(x) - B_n(x)| \leq \mathbb{E}\Big[|f(x) - f(\frac{S_n}{n})|\Big] \leq \mathbb{E}\Big[\omega\Big(|x - S_n|\Big)\Big]$. On en déduit que :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\mathbb{E}\Big[\sqrt{n}|x - \frac{S_n}{n}| + 1\Big]$$

$$= \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big[\sqrt{n}\|x - \frac{S_n}{n}\|_1 + 1\Big] \leq \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big[\sqrt{n}\|x - \frac{S_n}{n}\|_2 + 1\Big]$$

$$= \omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big[\sqrt{n}\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} + 1\Big] \leq \frac{3}{2}\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big);$$

D'où $\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$. Ceci prouve le point 2) pour $C = \frac{3}{2}$

3) Prenons $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$; alors $\omega(h) \leq h$, mais

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \Big|f\Big(\frac{1}{2}\Big) - B_n\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big| = \Big|B_n\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big|$$

$$= \mathbb{E}\Big[\Big|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\Big|\Big] = \frac{1}{2n}\mathbb{E}[|2S_n - n|] = \frac{1}{2n}\mathbb{E}[|\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n|],$$

où $S_n = \delta_1 + \cdots + \delta_n$, (δ_j) étant une i.i.d de variables de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et (ϵ_j), avec $\epsilon_j = 2\delta_j + 1$, étant une suite i.i.d de variables de Rademacher. L'inégalité de Khintchine nous permet alors d'écrire :

$$\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n}\|\epsilon_1 \dots \epsilon_n\|_1 \geq \frac{1}{2n\sqrt{2}}\|\epsilon_1 \dots \epsilon_n\|_2$$

Or $\|\epsilon_1 \dots \epsilon_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où $\|f - B_n\|_\infty \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\omega\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$. Ce qui prouve que la vitesse de convergence trouver en 2) est optimale. ∎