209

Approximation d'une fonction par des polynômes et polynômes trigonométriques. Exemples et applications

1 Du local au global

a) Formules de Taylor

E un $\mathbb{R}$-ev normé, I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Thm1 (Formule de Taylor-Young) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to E$ $(n+1)$-fois dérivable en $a \in I$. Alors quand $h \to 0$ on a : [GOU75]

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1}).$$

C-EX : ? /!\ important

Ex2 Développements limités en 0 :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \; ; \; \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Thm3 (Formule de Taylor, reste intégral) : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a,b] \to E$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, E un $\mathbb{R}$-ev de Banach. Alors [GOU75]

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Appli 4 (Thm de Bernstein) Soient $a > 0$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(2k)}(x) \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a,a[$. Alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$ [GOU50]

b) Fonctions développables en série entière (dse)

D un ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, x une variable de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Def5 Une fonction f à valeurs dans $\mathbb{K}$, définie au voisinnage de $x_0 \in D$ est développable en série entière au point x_0 s'il existe une série entière formelle $s(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ de rayon de convergence non nul telle que [CAR36]

$$f(x) = s(x) \text{ pour } |x - x_0| \text{ assez petit}$$

Ex6 $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$, $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

Def7 Une fonction $f : D \to \mathbb{K}$ est dite analytique dans D si pour tout $x_0 \in D$, f est dse en x_0. [CAR36]

Ex8 D'après la formule de Taylor, pour tout polynôme $P(x) = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ [AMR242]

Prop9 Une série entière est analytique dans son disque de convergence [CAR37]

Thm10 Une fonction f de la variable réelle x, $\mathcal{C}^\infty$ sur D est analytique dans D ssi tout $x_0 \in D$ a un vois. V tel que $\exists M, t > 0$ tq $\forall x \in V \, \forall p \geq 0$, $\left|\frac{1}{p!} f^{(p)}(x)\right| \leq M t^p$ [CAR39]

Ex11 $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais pas dse en 0 [AMR243]

Thm12 Une fonction de la variable complexe est holomorphe dans un disque ouvert ssi elle est dse dans ce disque. [CAR73]

Appli13 Toute fonction holomorphe est harmonique ie $\Delta f = 0$ (équation de la chaleur à l'équilibre) [CAR125]

2 Interpolation de Lagrange

$\mathcal{P}_n$ l'ev des polynômes sur $\mathbb{R}$ à coeff dans $\mathbb{R}$, $\deg \leq n$. $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$. On pose

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad 0 \leq i \leq n, \quad \Pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

Thm14 Le problème d'interpolation $p_n(x_i) = f(x_i)$ $(0 \leq i \leq n)$ admet une unique solution donnée par [DEM22]

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \in \mathcal{P}_n$$

[DEM 23] **Prop 15** (Formule d'erreur) On suppose f $(n+1)$-fois dérivable sur $[a,b]$. Alors $\|f-p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!}\|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$

[DEM 29] **Def 16** Les points d'interpolation de Tchebychev d'ordre n sont les $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$, $0\leq i\leq n$ racines de $t_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos x)$, $x\in[-1,1]$ (poly. de Tchebychev)

Prop 17 Si les points sont équidistants $\|\pi_{n+1}\| = O\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}$

En les points de Tchebychev $\|\pi_{n+1}\| = O\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$, quand $n\to\infty$

[DEM 32] **Thm 18** (Convergence) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ analytique, donnée par une série entière de rayon R centrée en $c = \frac{a+b}{2}$. Alors pour des points d'interpolation quelconques et $\lambda = 1$ (resp. équidistants et $\lambda = e$; de Tchebychev et $\lambda = 4$), les polynômes d'interpolation convergent uniformément vers f pourvu que $R > \left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{2}\right)(b-a)$

[DEM 36] **Ex 19** (Phénomène de Runge) Soit $\alpha > 0$, $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}$ $x\in[-1,1]$. Si α est suffisament petit, $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge pour tout $x \in]-1,1[$.

3 Approximation uniforme

$\mathcal{C}([a,b])$ muni de la norme uniforme. On note $d(f,\mathcal{P}_n) = \inf_{p\in\mathcal{P}_n}(\|f-p\|_\infty)$

[DEM 45] **Thm 20** Pour tout $n\in\mathbb{N}$ il existe un unique $q_n\in\mathcal{P}_n$ tel que $d(f,\mathcal{P}_n) = \|f-q_n\|_\infty$.

Ex 21 t_n est le polynôme de meilleure approximation uniforme de x^n.

[ZQ 518] **Thm 22** (Weierstrass) L'espace $\mathcal{P}$ des polynômes est dense dans $\mathcal{C}([a,b])$ pour la norme uniforme.

[GOU 237] **Appli 23** $f\in\mathcal{C}([0,1])$ est limite uniforme de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ ssi $f(0), f(1)\in\mathbb{Z}$

Appli 24 (Critère de Weyl) $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[0,1]$. $X_n(a,b) = \mathrm{Card}\{k\in[\![1,n]\!], u_k\in[a,b]\}$ On a les équivalences [X 47]

(i) $\frac{X_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} b-a$ pour tout couple (a,b)

(ii) $\forall f\in\mathcal{C}([0,1])$ $\lim \frac{1}{n}\sum_1^n f(u_k) = \int_0^1 f(t)\,dt$

(iii) $\forall p\in\mathbb{N}^*$ $\lim\frac{1}{n}\sum_1^n e^{2i\pi p u_k} = 0$

4 Point de vue Hilbertien

a) Polynômes orthogonaux

Def 25 I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to]0,+\infty[$ mesurable telle que $\forall n\in\mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$ [OA 110]

$L^2(I,\rho)$ l'espace de Hilbert tel que $\langle f,g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$

Prop 26 Il existe une unique famille de polynômes p_n unitaires, orthogonaux 2 à 2 tels que $\deg p_n = n$ [OA 110]

Ex 27

$]a,b[$:	$]0,+\infty[$	$]-\infty,+\infty[$	$]-1,1[$	$]-1,1[$
$\rho(x)$:	e^{-x}	e^{-x^2}	1	$1/\sqrt{1-x^2}$
famille :	Laguerre	Hermite	Legendre	Tchebychev

Thm 28 (Meilleure approximation quadratique) Soit $f\in L^2(I,\rho)$ Alors il existe un unique polynôme $r_n\in\mathcal{P}_n$ tel que $\|f-r_n\|_\rho = d_\rho(f,\mathcal{P}_n)$, obtenu par projection de f sur $\mathcal{P}_n$ [DEM 53]

$$r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, p_k\rangle}{\|p_k\|_\rho^2} p_k$$

Thm 29 (Densité des polynômes orthogonaux) S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$, les poly. orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$. [OA 140]

Contre-ex 30 $\rho(x) = x^{-\ln(x)}$

Def 31 Une méthode d'intégration approchée de type $\int_I f(x)\rho(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{\ell}\lambda_j f(x_j)$, $x_j\in I$ est d'ordre N si la formule est exacte pour tout $f\in\mathcal{P}_N$ et inexacte pour au moins un $f\in\mathcal{P}_{N+1}$ [DEM 60]

dim $\geq$?

[DEM73] [X32]

Appli 32 (Méthode de Gauss) Il existe un choix et un seul des x_j et des λ_j de sorte que la méthode $\int_I f(x)p(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j f(x_j)$ soit d'ordre $N=2\ell+1$. Les $x_j \in I$ sont les racines du $(\ell+1)$-ème polynome orthogonal pour le poids p.

$\Rightarrow \forall Q \in \mathbb{P}_{2\ell+1}$ $\int_I Q(x)p(x)\,dx = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda_j Q(x_j)$

b) Polynômes trigonométriques

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $e_n(x) = e^{inx}$, $L^2(\mathbb{T})$ le Hilbert tel que

$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$; $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$ $f \in L^1(\mathbb{T})$

$S_N(f) = \sum_{-n}^{n} c_n(f)\, e_n$

[ZQR] Prop 33 · $(e_n)_{\mathbb{Z}}$ est un système orthonormal

· pour $f\in L^1(\mathbb{T})$, $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_1\|g\|_\infty$

[OA119] Def 34 Une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^1(\mathbb{T})$ est une identité approchée si

(i) $\varphi_n(t)\ge 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ pp $t\in\mathbb{T}$

(ii) $\|\varphi_n\|_1 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $\forall \eta>0$ $\lim_{n\to+\infty}\int_{|t|>\eta}\varphi_n(t)\,dt = 0$

[ZQ75] Def 35 Le noyau de Dirichlet d'ordre $N\geq 0$: $D_N = \sum_{-N}^{N} e_n$

Prop 36 $\|D_N\|_1 = 1$, $D_N(x) = \frac{\sin[(N+1/2)x]}{\sin(x/2)}$

$S_N(f) = D_N * f$, $\forall f\in L^1(\mathbb{T})$ $\forall N\geq 0$ $\forall x\in]0,2\pi[$

Def 37 · Le noyau de Fejér d'ordre $N\geq 1$

$K_N = \frac{D_0+\dots+D_{N-1}}{N}$

La somme de Fejér d'indice N de $f\in L^1(\mathbb{T})$

$\sigma_N(f) = \frac{1}{N}(S_0(f)+\dots+S_{N-1}(f))$

Prop 38 K_N est une identité approchée [ZQ76]

$K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin x/2}\right)^2$

$\sigma_N(f) = f*K_N$, $\forall f\in L^1(\mathbb{T}), \forall N\geq 1, \forall x \in]0,2\pi[$

Thm 39 (Fejér) [ZQ84] DEV

· Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \le \|f\|_\infty$ $\forall N\geq 1$ et $\lim_{N\to+\infty}\|\sigma_N(f)-f\|_\infty = 0$

· Soit $f\in L^p(\mathbb{T})$ $(1\le p<\infty)$; alors $\|\sigma_N(f)\|_p\le\|f\|_p$ $\forall N\geq 1$ et $\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f)-f\|_p = 0$

Appli 40. $(e_n)_{\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ [ZQ86]

· Les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$

Thm 41 Soit $f\in L^1(\mathbb{T})$, $x_0\in\mathbb{T}$. On suppose [ZQ89]

· $\lim_{t\to0^+} f(x_0+t) := f^+$ $\lim_{t\to0^-} f(x_0+t) := f^-$ existent

· Il existe $\delta>0$ tel que

$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t)-f^+|}{t}\,dt<\infty$ et $\int_0^\delta \frac{|f(x_0-t)-f^-|}{t}\,dt<\infty$

Alors on a $\lim_{N\to+\infty} S_N(f,x_0) = \frac{1}{2}(f^++f^-)$

Ex 42 (Phénomène de Gibbs) Soit $f\in L^1(\mathbb{T})$ $f(x)=x$ pour $x\in[0,2\pi[$. f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc $S_N(f,x_0)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\tilde f(x_0) = \frac{1}{2}(f^++f^-)(x_0)$ pour tout x_0. La convergence n'est uniforme sur aucun intervalle d'intérieur non-vide contenant 0. [X331]

Prop 43 (Convergence normale) Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $S_N(f)$ converge normalement vers f. [OA130]

Références

[AMR] El Amrani, Suites et séries numériques
suites et séries de fonctions.

[CAR] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes

[DEM] J-P Demailly, Analyse numérique et équations différentielles. ai

[GOU] X. Gourdon, Analyse ai

[OA] Objectif Agrégation

[X] Francinou, Gianella, Oraux X-ENS
Analyse 2 ai

[ZQ] Zuily Queffélec, Analyse pour l'agrégation ai

Théorème de Fejér

Frédéric CROZATIER & Morgane LE BON

Octobre 2016

Référence : Zuily, Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*, p.84
Recasement :
- 209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
- 213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
- 240 Produit de convolution, transformation de Fourier. Applications.
- 246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

Définition 1. *Soient $f \in L^1_{2\pi}, N \geq 1$. La* somme de Fejér d'indice N de f *est l'application définie par :*

$$\sigma_N(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_{N-1}(f)}{N}$$

On veut démontrer le théorème suivant :

Théorème 2 (Fejér). *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors pour tout entier $N \geq 1$ on a $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\lim\limits_{N\to\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$.*

Avant de commencer, nous avons besoin de quelques propriétés et définitions.

Proposition 3. *Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $g \in L^\infty_{2\pi}$. Alors $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.*

Proposition 4. *Le noyau de Dirichlet D_N vérifie :*

1. $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)dt = 1$
2. $D_N(x) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin(x/2)}$
3. $S_N(f) = f * D_N$, *pour tout* $N \geq 0$, $f \in L^1_{2\pi}$.

Proposition 5. *Le noyau de Fejér K_N vérifie :*

1. $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \geq 0$
2. $\|K_N\|_1 = 1$
3. $0 < \delta \leq \pi \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|\leq\pi} K_N(x)dx = 0$
4. $\sigma_N(f) = f * K_N$, *pour tout* $f \in L^1_{2\pi}$, $N \geq 1$.

Démonstration. Soit $N \geq 1$.

1. D'après les propriétés du noyau de Dirichlet, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
NK_N(x) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin((k+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(k+\frac{1}{2})x}\right) \\
&= \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1}\right) = \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{x}{2}} e^{iN\frac{x}{2}} 2i\sin(N\frac{x}{2})}{e^{i\frac{x}{2}} 2i\sin(\frac{x}{2})}\right) \\
&= \frac{\sin(N\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} \operatorname{Im}(e^{iN\frac{x}{2}}) \\
&= \left(\frac{\sin(N\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2
\end{aligned}$$

2. Comme $K_N \geq 0$,

$$\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(t)dt = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)dt = 1$$

d'après les propriétés du noyau de Dirichlet.

3. Soit $\delta \in]0,\pi]$. Si $\delta < |x| \leq \pi$, on a $\sin^2(x/2) \geq \sin^2(\delta/2)$.
Ainsi $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right) \leq \frac{1}{N\sin^2(\delta/2)}$, et

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|x|\leq\pi} K_N(x)dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(x)dx \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

d'où le résultat.

4. Ceci découle encore une fois des propriétés du noyau de Dirichlet :

$$N\sigma_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = \sum_{n=0}^{N-1} f * D_N = f * \left(\sum_{n=0}^{N-1} D_n\right),$$

ce qui implique $\sigma_N(f) = f * K_N$.

□

Preuve du théorème

Définition 6. *Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Le* module de continuité de f *est l'application $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par*

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(u) - f(v)|;\ |u - v| \leq \delta\}.$$

Soient $\delta \in]0,\pi]$ et $\omega(\delta)$ le module de continuité de f en δ. On a :

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty = \|f * K_N\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|K_N\|_1 = \|f\|_\infty .$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) - \sigma_N(f,x) &= f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)K_N(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x) - f(x-t)]K_N(t)dt
\end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
|f(x) - \sigma_N(f,x)| &\le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|\le\delta} |f(x) - f(x-t)| K_N(t)dt + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta<|t|\le\pi} |f(x) - f(x-t)| K_N(t)dt \\
&\le \frac{\omega(\delta)}{2\pi} \int\limits_{|t|\le\delta} K_N(t)dt + 2\,\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta<|t|\le\pi} K_N(t)dt \\
&\le \frac{\omega(\delta)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)dt + 2\,\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta<|t|\le\pi} K_N(t)dt \\
&= \omega(\delta) + 2\,\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\delta<|t|\le\pi} K_N(t)dt.
\end{aligned}
$$

Ainsi $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \le \omega(\delta) + 2\,\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\delta<|t|\le\pi} K_N(t)dt$. Passant à la lim sup, on a d'après la proposition 5 :

$$\limsup_{N\to\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty \le \omega(\delta).$$

Comme $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$, en utilisant la continuité uniforme de f on obtient :

$$\limsup_{N\to\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty \le 0$$

i.e. $\lim\limits_{N\to\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0$.

Développement : théorème de Weierstrass

Morgane LE BON et Frédéric CROZATIER

Théorème : Toute fonction continue $f: [a; b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a; b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

Plan :

1. Introduction d'un espace probabilisé
2. On montre que pour tout $x \in [0; 1]$, $|B_n(x) - f(x)| \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}$, où $\delta(\varepsilon)$ est un module de continuité
3. On montre que $\delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$
4. Conclusion

Démonstration :

Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle fermé $[0; 1]$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le polynôme de Bernstein défini par : $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

1. Soit $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $x \in]0; 1[$.

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre x.

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{S_n}{n}$.

Alors la loi de S_n est la loi binomiale $B(n, x)$.

Et on a : $\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = x$, par linéarité de l'espérance.

$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{x(1-x)}{n}$, car les X_k sont indépendantes.

2. D'abord : $\mathbb{E}(f(Y_n)) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \times \mathbb{P}(S_n = k)$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = B_n(x)$$

Ainsi pour tout $x \in]0 ; 1[$, on a : $|B_n(x) - f(x)| = |\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(x)| \leq \mathbb{E}(|f(Y_n) - f(x)|)$

Soit $\varepsilon > 0$.

On pose : $\delta(\varepsilon) := \sup\{|f(x) - f(y)|, (x, y) \in [0.1]^2 et\ |x - y| \leq \varepsilon\}$.

D'où : $|B_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}(\mathbb{1}_{|Y_n - x| \leq \varepsilon}|f(Y_n) - f(x)|) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{|Y_n - x| > \varepsilon}|f(Y_n) - f(x)|$

$\leq \delta(\varepsilon) + 2\|f\|_\infty \times \mathbb{P}(|Y_n - x| > \varepsilon)$

Or, d'après l'inégalité de Tchebychev, on a :

$$\mathbb{P}(|Y_n - x| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

Et de plus, $\frac{\mathbb{V}(Y_n)}{\varepsilon^2} = \frac{x(1-x)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$ car $x(1-x) \leq 1$.

Donc : $|B_n(x) - f(x)| \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}$.

La fonction $B_n - f$ étant continue sur $[0 ; 1]$, on a alors :

$$sup_{x\in[0;1]}|B_n(x) - f(x)| \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}$$

3. Montrons que $\delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$.

La fonction f est continue sur le compact $[0\,;1]$, donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0\,;1]$.
Ce qui s'exprime par le fait que $\delta(\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε.

4. On a montré que pour tout $\varepsilon > 0 : 0 \leq sup_{x\epsilon[0;1]}|B_n(x) - f(x)| \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}$.
D'où : $0 \leq limsup_n\, sup_{x\epsilon[0;1]}|B_n(x) - f(x)| \leq \delta(\varepsilon) \cancel{+ \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}}$.
Donc pour $\varepsilon \to 0$, on a : $limsup_n\, sup_{x\epsilon[0;1]}|B_n(x) - f(x)| = 0$.
Enfin, $lim_n\, sup_{x\epsilon[0;1]}|B_n(x) - f(x)| = 0$.
C'est-à-dire que la suite des polynômes de Bernstein $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ vers la fonction f.

On vient donc de montrer que toute fonction continue sur $[0\,;1]$ est limite uniforme de fonctions polynômes sur $[0\,;1]$.
On en déduit par changement de variable affine le théorème de Weierstrass (si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue, on se ramène à [0 ;1] en considérant $g(x) = f(a + (b - a)x)$).

Référence : Jean-Yves Ouvrard « Probabilités 1 : capes-agrégation » (exercice 5.6 page 162)