Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et Applications.

209

I - Interpolation polynomiale.

1) Interpolation de Taylor

Soit $x_0 \in]a,b[$ fixé.

Thm 1. Pour tout $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in \{0,\dots,n\}$, $P^{(i)}(x_0) = y_i$; de plus on a :
$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i t_i(x)$, avec $t_i(x) = \frac{(x-x_0)^i}{i!}$

Prop 2. Soit $f \in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$.
Alors le polynôme d'interpolation de Taylor aux points $(f^{(i)}(x_0))_{0\le i\le n}$, noté $T_n(f)$, vérifie : $f(x) - T_n(f)(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0))\,du$

Déf 3. Soit $f \in C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ avec $x_0 \in]a,b[$.
On dit que f est développable en série entière au voisinage de x_0 si $T_n(f)$ converge ponctuellement vers f sur un voisinage de x_0 dans $[a,b]$.

Ex 4. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est développable en série entière au voisinage de x_0

C-Ex 5. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\le 0 \end{cases}$ n'est pas dse.

2) Interpolation de Lagrange.

Soient $x_0,\dots,x_p \in [a,b]$ deux à deux distincts dépendants de p.

Thm 6. Pour tout $y \in \mathbb{R}^{p+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que : $\forall i \in \{0,\dots,p\}$, $P(x_i) = y_i$; de plus on a : $P(x) = \sum_{i=0}^{p} y_i l_i(x)$, avec $l_i(x) = \prod_{j\ne i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

Prop 7. Soit $f \in C^{p+1}([a,b],\mathbb{R})$.
Alors le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(f(x_i))_{0\le i\le p}$, noté $L_p(f)$, vérifie : $f(x) - L_p(f)(x) = \frac{1}{(p+1)!}\pi_p(x)\cdot f^{(p+1)}(c_x)$
où $\pi_p(x) = \prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$, et $c_x \in]a,b[$.

App 8 (Méthodes de Newton-Cotes). Soit $f \in C^{p+1}([a,b],\mathbb{R})$.
$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b L_p(f)(x)\,dx\right| \le \frac{\|f^{(p+1)}\|_\infty}{(p+1)!}\int_a^b |\pi_p(x)|\,dx$.

Ex (Simpson). $p=2$, $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$.
$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b L_2(f)(x)\,dx\right| \le \frac{(b-a)^4}{192}\|f^{(3)}\|_\infty$ pour $f \in C^3([a,b],\mathbb{R})$.

Rq 9 (Phénomène de Runge) Il existe des fonctions analytiques f sur $[a,b]$ dont la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange ne converge pas (ponctuellement) vers f.
Ex. $f_\alpha : x \in [-1,1] \mapsto \frac{1}{x^2+\alpha^2}$ pour $\alpha>0$ assez petit et $x_0,\dots,x_p$ équidistants.

3) Interpolation de Hermite.

Soient $x_0,\dots,x_p \in [a,b]$ deux à deux distincts dépendants de p, et $n_0,\dots,n_p$ des entiers naturels.

Thm 10. Pour tout $(y_{i,k})_{0\le i\le p,\ 0\le k\le n_i}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_m[X]$ avec $m = (\sum_{i=0}^{p} n_i)+p$, tel que : $\forall i \in \{0,\dots,p\}$, $\forall k \in \{0,\dots,n_i\}$ $P^{(k)}(x_i) = y_{i,k}$.

Prop 11. Soit $f \in C^{m+1}([a,b],\mathbb{R})$
Alors le polynôme d'interpolation de Hermite aux points $(f^{(k)}(x_i))_{0\le i\le p,\ 0\le k\le n_i}$, noté $H_p(f)$, vérifie : $f(x) - H_p(f)(x) = \frac{1}{m!}\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)^{n_i+1} f^{(m+1)}(c_x)$
où $c_x \in]a,b[$.

Déf 12. On dit que les points $x_0,\dots,x_p$ sont les abscisses de Tchebychev de $[a,b]$ si :
$\forall i \in \{0,\dots,p\}$, $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2i+1}{2p+2}\pi\right)$.

DEV

Thm 13 Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$.
Alors la suite $(\tilde{H}_p(f))_{p\geq 0}$ des polynômes d'interpolation de Hermite en les abscisses de Tchebychev de $[a,b]$, définis par : $(\forall i \in \{0,\dots,p\}, \tilde{H}_p(f) = f(x_i)$ et $\tilde{H}_p(f)'(x_i) = 0)$, converge uniformément vers f sur $[a,b]$, et on a $\forall p \geq 0, \|\tilde{H}_p(f) - f\|_\infty \leq \omega_f\left(\sqrt{\frac{3}{p+1}}\right)$ où ω_f est le module de continuité de f.
On utilisera le résultat suivant.

Thm 14 (Korovkin). Soit $(u_n)_n$ une suite d'opérateurs positifs de $C^0([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall n, u_n(e_0) = e_0$. Si $(u_n(e_1))_n$ et $(u_n(e_2))_n$ convergent uniformément vers e_1 et e_2, alors $(u_n(f))_n$ converge uniformément vers f pour tout $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, avec : $\|u_n(f) - f\|_\infty \leq 2\omega_f(\sqrt{c\gamma_n})$, où $c = \max(1+2|x|)$, et $\gamma_n = \max(\|e_1 - u_n(e_1)\|_\infty, \|e_2 - u_n(e_2)\|_\infty)$.

II - Méthodes et résultats utilisant l'approximation par des polynômes

1) Approximation sur un compact.

Thm 15 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. En notant $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|B_n - f\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Rq 16. Sur $\mathbb{R}$, une limite uniforme de polynomes est un polynôme.

App 16. Si $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ vérifie $(\forall n \geq 0, \int_a^b f(t)t^n dt = 0)$, alors $(f = 0)$

App 17. $(C^0([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable.

App 18 Théorème Taubérien fort.

Dans la suite de cette sous partie, X désigne un espace métrique compact.

Déf 19 On dit qu'une partie A de $C^0(X,\mathbb{R})$ est séparante si :
$\forall x,y \in X, (x \neq y) \Rightarrow (\exists h \in A, h(x) \neq h(y))$

Thm 20 (Stone - Weierstrass) Toute sous algèbre de $C^0(X,\mathbb{R})$, séparante et contenant les fonctions constantes, est dense dans $(C^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

App 21 Si X est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ est dense dans $C^0(X,\mathbb{R})$.

App 22 Si X est un compact de $\mathbb{R}^n$ alors $(C^0(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable

2) Polynômes orthogonaux

Dans cette sous partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho \in C^0(I, \mathbb{R}_+^*)$ désigne une fonction poids

Déf 23 On note $L^2(\rho) = \{ f \mid \int_I |f(x)|^2 \rho(x) dx < +\infty \}$ et on munit cet espace du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)\rho(x)dx$ qui en fait un espace de Hilbert.

Prop 24. Il existe une unique famille orthonormée $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes à coefficients dominants positifs avec : $\deg P_n = n$.

Ex 25 1) Tchebychev : $I =]-1,1[$, $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $P_n(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{\pi} & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n \arccos x) & \text{sinon} \end{cases}$

2) Hermite : $I = \mathbb{R}$, $\rho(t) = e^{-t^2}$, $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{\pi^{1/4}\sqrt{2^n n!}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

3) Legendre : $I =]-1,1[$, $\rho(t) = 1$, $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^n)$

Rq 26. Les abscisses de Tchebychev de $[-1,1]$ sont les racines du polynôme de Tchebychev

Thm 27 S'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < +\infty$, alors la famille $(P_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(\rho)$

Ce résultat permet de diagonaliser certains opérateurs.

App 28. Soit $(P_n)_n$ la famille des polynômes orthogonaux de Hermite. La famille $(\psi_n)_n$ définie par $(\psi_n(x) = P_n(x)e^{-x^2/2})$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour la transformée de Fourier $\mathcal{F}$, avec : $\mathcal{F}\psi_n = i^n\sqrt{2\pi}\,\psi_n$.

3) Fonctions développables en séries entières

Prop. 29 Soit $f \in C^\infty(]-R,R[)$.
S'il existe $M, a \geq 0$ tels que $\forall n \geq 0, \forall x \in]-R,R[, |f^{(n)}(x)| \leq M a^n$,
alors f est dse sur $]-R,R[$.

Rq 30 Le dse donne une méthode de résolution pour certaines équations différentielles.

App. L'équation $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$ admet une unique solution y, donnée par. $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} x^{2k} = \frac{ch(x)-1}{x^2}$

III - Approximation par des polynômes trigonométriques

- Dans cette partie, on désigne par C (resp L^p, $1 \leq p \leq \infty$) l'ens des fonctions continues (resp de classe L^p $1 \leq p \leq \infty$) 2π-périodiques
- On note $e_n : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{int}$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et on appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire des e_n, $n \in \mathbb{Z}$

Prop 31. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale de L^2 pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$.

1) Théorème de Féjer.

Déf 32. Pour $N \geq 0$, on note $\begin{cases} D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n \text{ le noyau de Dirichlet} \\ F_N = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N} D_n \text{ le noyau de Féjer} \end{cases}$

Rq 33 $f * D_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n =: S_N(f)$, où $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$
$f * F_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$

Thm 34 (Féjer). Si $f \in C$, alors $\|F_N * f - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

App 35 Toute fonction de C dont la série de Fourier converge normalement (ie $\sum |c_n(f)| < \infty$) peut être développée en série de Fourier.

App 36. La transformée de Fourier $\mathcal{F}: L^1 \longrightarrow C_0$ est injective.

DEV

App 37 Deux variables aléatoires avec mêmes fonctions caractéristiques ont même loi.

2) Théorème de Dirichlet.

Prop. 38 Il existe des fonctions dans C dont la suite des sommes de Fourier diverge

Ex. 39 $f = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k P_k$, avec $P_k(x) = e^{2i n_k x} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\sin(jx)}{j}$ tel que.
$n_{k+1} > 3 n_k > 0$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k < \infty$, $\alpha_k \log(n_k) \to \infty$

Thm 40 (Dirichlet) - Soient $f \in L^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
On suppose que f admet des limites à gauche et à droite en x_0, et qu'il existe $\delta > 0$ tel que : $\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f(x_0^+)|}{t} dt, \int_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f(x_0^-)|}{t} dt < \infty$
Alors on a : $\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-))$

Ex 41 Soit, pour $\varepsilon \in]0,\pi[$, $\sigma_\varepsilon = \mathbb{1}_{[0,\varepsilon]} \in L^\infty$. On a : $S_N(\sigma_\varepsilon)(\varepsilon) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1/2$ ce qui donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(na)/n = (\pi - a)/2$ pour $a = 2\varepsilon$.

3) Applications.

Thm 42 (Équation de la chaleur). - Soient $L > 0$ et $h \in C^1([0,L])$ tq : $h(0) = h(L) = 0$.
Alors il existe un unique $u \in C^0(\bar{Q}) \cap C^2(Q)$ tel que : $\partial_t u - \partial_{xx} u = 0$ sur Q, $u(0,\cdot) = u(L,\cdot) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $u(\cdot,0) = h$ sur $[0,L]$ (où $Q = \mathbb{R}_+^* \times]0,L[$), obtenu à partir des coefficients de Fourier de h.

Le développement en série de Fourier peut aussi servir à obtenir des inégalités.

Thm 43 (Inégalité isopérimétrique). Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe de Jordan de classe C^1, de longueur L et enfermant une surface S. Alors $L^2 \geq 4\pi S$.

Références

1) Pour le plan :

(i) Jean-Étienne Rombaldi - Interpolation et Approximation

(ii) Jean-Pierre Demailly - Analyse numérique et équations différentielles.

(iii) Hervé Queffélec, Claude Zuily - Analyse pour l'agrégation.

(iv) Xavier Gourdon - Analyse et Algèbre

2) Pour les développements :

(i) Jean-Étienne Rombaldi - Interpolation et Approximation.

(ii) Hervé Queffélec, Claude Zuily - Analyse pour l'agrégation.

Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ $\quad S_{p,q}(f) = \sum_{n=-p}^{q} \hat{f}_n z^n$.

Si f α holder, alors
$$\sum_{-p}^{q} \hat{f}_k(t) e^{int} \underset{t \to 1}{\longrightarrow} f(1).$$

Théorème de Korovkin et interpolation de Hermite

Dans toute la suite $I \subset \mathbb{R}$ désigne un segment et $\mathcal{C}(I)$ l'espace des fonctions réelles continues sur I. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $e_k : I \to \mathbb{R}, x \mapsto x^k$ la fonction puissance k.

Définition. *Un opérateur $u : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ est dit positif si :*

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad f \geq 0 \implies u(f) \geq 0.$$

Remarque. *Si u est positif alors pour toute fonction $g \in \mathcal{C}(I)$, $|u(g)| \leq u(|g|)$.*

Théorème (Korovkin). *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'opérateurs linéaires positifs de $\mathcal{C}(I)$ dans $\mathcal{C}(I)$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n(e_0) = e_0$. Si les suites $(u_n(e_1))_n$ et $(u_n(e_2))_n$ convergent uniformément vers e_1 et e_2 alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I)$, la suite $(u_n(f))_n$ converge uniformément vers f avec l'estimation :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n(f) - f\|_\infty \leq 2\omega_f(\sqrt{c\gamma_n}),$$

où $c = \max\limits_{x\in I}(1 + 2|x|)$ et $\gamma_n = \max(\|u_n(e_1) - e_1\|_\infty, \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty)$.

Lemme. *Soient $f \in \mathcal{C}(I)$ et $\delta > 0$, on a :*

$$\forall t, x \in I, \quad |f(x) - f(t)| \leq \omega_f(\delta)(1 + \frac{(t-x)^2}{\delta^2}).$$

Preuve du lemme. Pour de tels f et δ, prenons $x, t \in I$, $x < t$. On découpe l'intervalle $]x, t[$ en sous intervalles de longueurs inférieures à δ de sorte qu'apparaisse le module de continuité de f.
Notons $n = 1 + \lfloor \frac{x-t}{\delta} \rfloor$ et posons pour $k \in [\![0, n]\!]$, $t_k = t + k\frac{x-t}{n}$. On a $t = t_0 < t_1 < ... < t_n = x$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!], 0 < t_{k+1} - t_k < \delta$. On a alors :

$$|f(x) - f(t)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)| \leq n\omega_f(\delta) \leq (1 + (n-1)^2)\omega_f(\delta).$$

Or par définition de n on a $n - 1 \leq \frac{x-t}{\delta}$, d'où le résultat. □

Preuve du théorème. Soient $f \in \mathcal{C}(I)$ et $x \in I$. Notons $\psi_x : t \mapsto (x-t)^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, puisque u_n est positif, on a d'après le lemme :

$$|u_n(f) - f(x)| \leq \omega_f(\delta)\left(e_0 + \frac{u_n(\psi_x)}{\delta^2}\right).$$

En appliquant cela en x on obtient :

$$|u_n(f)(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta)\left(1 + \frac{u_n(\psi_x)(x)}{\delta^2}\right).$$

Il s'agit maintenant d'estimer $u_n(\psi_x)(x)$. Or, on a $\psi_x = x^2 e_0 - 2xe_1 + e_2$ donc : $u_n(\psi_x)(x) = x^2 - 2xu_n(e_1)(x) + u_n(e_2)(x) = 2x(x - u_n(e_1)) + u_n(e_2)(x) - x^2$. Il vient :

$$u_n(\psi(x))(x) \leq 2|x||e_1(x) - u_n(e_1)(x)| + |u_n(e_2)(x) - e_2(x)| \leq c\gamma_n.$$

Puisque $x \in I$ est quelconque on a obtenu :

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \omega_f(\delta)\left(1 + \frac{c\gamma_n}{\delta^2}\right).$$

Si $\gamma_n = 0$ alors $\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \omega_f(\delta)$ et en faisant tendre δ vers 0 on obtient : $u(f) = f$. Sinon on prend $\delta = \sqrt{c\gamma_n}$, ce qui donne le résultat. □

Ce théorème est un outil pour démontrer qu'une certaine méthode d'interpolation, donnée par les opérateurs u_n, converge. Étudions le cas de l'interpolation de Hermite sur les abscisses de Tchebychev. Ici, $I = [-1, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, les abscisses de Tchebychev sont données par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)\pi}\right).$$

Ce sont les racines du polynômes $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos(x))$.
Notons π_{n+1} et L_k les polynômes :

$$\pi_{n+1} = \prod_{k=0}^{n}(X - x_k) \quad \text{et} \quad L_k = \prod_{i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$$

On regarde l'opérateur H_n qui à une fonction $f \in \mathcal{C}([-1,1])$ associe l'unique polynôme $H_n(f)$ de degré au plus $2n+1$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad H_n(f)(x_k) = f(x_k) \quad \text{et} \quad H_n(f)'(x_k) = 0.$$

Lemme. *Pour $f \in \mathcal{C}([-1,1])$ on a :*

$$\forall x \in I, \quad H_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{1 - x_k x}{1 - x_k^2} L_k^2(x).$$

Preuve du lemme. Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1])$, par unicité on a :

$$H_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)(1 - 2(X - x_k)L_k')L_k^2.$$

Il suffit alors de montrer que $2L_k'(x_k) = \frac{x_k}{1-x_k^2}$
On remarque que $\pi_{n+1} = (X - x_k)\pi_{n+1}'(x_k)L_k$ donc :

$$\begin{cases} \pi_{n+1}' = \pi_{n+1}(x_k)(L_k + (X - x_k)L_k') \\ \pi_{n+1}'' = \pi_{n+1}'(x_k)(2L_k' + (X - x_k)L_k'') \end{cases}$$

Il vient :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad 2L_k'(x_k) = \frac{\pi_{n+1}''(x_k)}{\pi_{n+1}'(x_k)}. \tag{1}$$

Les x_k sont les racines simples des polynômes π_{n+1} et T_{n+1}. Par dérivée logarithmique on a donc : $\frac{\pi_{n+1}'}{\pi_{n+1}} = \frac{T_{n+1}'}{T_{n+1}}$ et en dérivant à nouveau :

$$\frac{\pi_{n+1}''}{\pi_{n+1}'} = \frac{T_{n+1}''}{T_{n+1}'}. \tag{2}$$

Or, on peut calculer, en dérivant T_n :

$$\frac{T_{n+1}''(x_k)}{T_{n+1}'(x_k)} = \frac{x_k}{1 - x_k^2}.$$

Donc d'après (1) et (2) :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad 2L_k'(x_k) = \frac{x_k}{1 - x_k^2}.$$

□

Maintenant que l'on a un expression pour $H_n(f)$ on va montrer la convergence uniforme de la suite d'opérateurs H_n sur $e_1 : x \mapsto x$ et $e_2 : x \mapsto x^2$ vers e_1 et e_2. Puisque les H_n sont des opérateurs positifs et vérifient, $H_n(e_0) = e_0$, le théorème de Korovkin assurera que cette méthode d'interpolation converge uniformément sur $\mathcal{C}([-1,1])$.

Lemme. *Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$, en posant $\theta = \arccos(x)$ et $R_n(e_k) = e_k - H_n(e_k)$ on a :*

$$\begin{cases} R_n(e_1)(x) = \dfrac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\left(x\cos((n+1)\theta) + \sqrt{1-x^2}\sin((n+1)\theta)\right) \\ R_n(e_2)(x) = \dfrac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\left((2x^2-1)\cos((n+1)\theta) + 2x\sqrt{1-x^2}\sin((n+1)\theta)\right) \end{cases}$$

Preuve du lemme. D'abord, on remarque que :

$$L_k = \frac{\pi_{n+1}}{(X-x_k)\pi'_{n+1}(x_k)} = \frac{T_{n+1}}{(X-x_k)T'_{n+1}(x_k)} = \frac{(-1)^k\sqrt{(1-x_k^2)}}{n+1}\frac{T_{n+1}}{X-x_k}.$$

Ainsi, d'après le lemme précédent, $H_n(f)$ s'exprime :

$$\forall x \in I, \quad H_n(f)(x) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)(1-x_kx)(\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k})^2.$$

Calculons le premier reste $R_n(e_1)$, le calcul du second est similaire. Comme $H_n(e_0) = e_0$ on a :

$$\begin{aligned} R_n(e_1)(x) = xH_n(e_0) - H_n(e_1) &= \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)(1-x_kx)(\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k})^2 \\ &= \frac{T_{n+1}(x)}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}(1-x_kx)\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k}. \end{aligned}$$

En écrivant $1-x_kx = 1-x^2+x(x-x_k)$ et en rappelant que $T'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{T_{n+1}(x)}{x-x_k}$ on obtient :

$$\forall x \in I, \quad R_n(e_1)(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{(n+1)^2}\left((1-x^2)T'_{n+1}(x) + (n+1)xT_{n+1}(x)\right).$$

Comme on a $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta)$ et en dérivant, $T'_{n+1}(x) = \frac{n+1}{\sqrt{(1-x^2)}}\sin((n+1)\theta)$, cela donne la formule pour $R_n(e_1)$.

$\square$

D'après ce lemme on a alors $\|e_1 - H_n(e_1)\|_\infty = \|e_2 - H_n(e_2)\|_\infty = \frac{1}{n+1}$. En application du théorème de Korovkin on a donc démontré le résultat suivant.

Théorème. *L'interpolation de Hermite converge, au sens où pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([-1,1])$ on a :*

$$\|H_n(f) - f\|_\infty \leq 2\omega_f\left(\sqrt{\frac{3}{n+1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème de Féjer et applications

Théorème (Féjer)**.** *Si f est une fonction de C, alors :*

$$\|F_N \star f - f\|_\infty \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On commence par montrer la proposition suivante :

Proposition. *On a les propriétés suivantes:*

1. Le noyau de Dirichlet vérifie :

$$D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

2. Le noyau de Féjer vérifie :

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} (1 - \frac{|n|}{N}) e_n(x) = \frac{1}{N} (\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)})^2 \geq 0$$

3. La masse du noyau de Féjer est égale à 1 :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1$$

4. La masse du noyau de Féjer se concentre en 0 :

$$\forall 0 < \delta \leq \pi,\ \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta<|x|\leq\pi} F_N(x) dx = 0$$

Preuve. 1. On peut supposer e^{ix} différent de 1 ; alors :

$$\begin{aligned} D_N(x) = e^{-iNx} \sum_{k=0}^{2N} e^{ikx} &= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)ix/2} (e^{(2N+1)ix/2} - e^{-(2N+1)ix/2})}{e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2})} \\ &= \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \end{aligned}$$

2. Par définition on a :

$$\begin{aligned} NF_N = \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) &= \sum_{k=0}^{N-1} (\sum_{|n\leq k} e_n(x)) \\ &= \sum_{|n|\leq N-1} e_n(x) (\sum_{k=|n|}^{N-1} 1) \\ &= \sum_{|n|\leq N} e_n(x) \end{aligned}$$

d'où la première égalité en divisant par N. D'autre part en utilisant 1. on a :

$$\begin{aligned}NF_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin((k+1/2)x)}{\sin(x/2)} &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i(k+1/2)x}) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im(e^{ix/2} \frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1}) \\ &= \frac{1}{\sin(x/2)} \Im(e^{ix/2} \frac{e^{iNx/2} 2i \sin(Nx/2)}{e^{ix/2}} 2i \sin(x/2)) \\ &= \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)^2} \Im(e^{iNx/2}) \\ &= (\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)})^2\end{aligned}$$

3. Puisque F_N est positif, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)dx = c_0(F_N) = 1$$

d'après la première égalité de 2.

4. Soit δ un nombre strictement positif et inférieur à π. On a l'inégalité :

$$\sin(x/2)^2 \leq \sin(\delta/2)^2$$

et donc :

$$F_N(x) \leq \frac{1}{N \sin(\delta/2)^2}$$

en utilisant 2. On en déduit la relation :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| \leq \pi} F_N(x)dx \leq \frac{1}{N \sin(\delta/2)^2}$$

qui entraîne la conclusion souhaitée. □

On peut maintenant prouver le théorème de Féjer.

Preuve. Soit δ un nombre strictement positif et inférieur à π. En utilisant la proposition précédente on a :

$$\begin{aligned}|f(x) - f \star F_N(x)| &= |\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))F_N(t)dt| \text{ d'après le point 3.} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)|F_N(t)dt \text{ d'après le point 2.} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} |f(x) - f(x-t)|F_N(t)dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} |f(x) - f(x-t)|F_N(t)dt \\ &\leq \frac{\omega_f(\delta)}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} F_N(t)dt + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi} \int_{\delta < |t| \leq \pi} F_N(t)dt \\ &\leq \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| \leq \pi} F_N(x)dx\end{aligned}$$

d'où en utilisant le point 4. de la proposition précédente :

$$\limsup_{N \to +\infty} \|f - f \star F_N\|_\infty \leq \omega_f(\delta)$$

On obtient finalement le résultat en faisant tendre δ vers 0. □

Le théorème de Féjer a de nombreuses conséquences, dont les deux suivantes.

Application. *Toute fonction de C dont la série de Fourier converge normalement peut être développée en série de Fourier.*

Preuve. Soit f une fonction de C dont la série de Fourier converge normalement. Noton L la limite uniforme de la série de Fourier de f. On a en particulier la convergence ponctuelle suivante :

$$S_n(f)(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L(x)$$

Le théorème de Césaro entraîne alors :

$$f \star F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} L(x)$$

Or d'après le théorème de Féjer :

$$f \star F_N(x) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

donc finalement :

$$f = L = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$$

□

Application. *La transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^1 \longrightarrow C_0$ est injective.*

Preuve. Soit f une fonction dans L^1 de transformée de Fourier nulle. On veut en déduire que f est nulle ; pour cela, on va montrer que l'intégrale de f contre toute fonction continue à support compact est nulle. Soient donc ϕ une fonction continue à support compact, et ϵ un réel strictement positif. Comme f est intégrable, il existe un réel A strictement positif tel que :

$$\int_{|x| \geq A} |f(x)| dx \leq \epsilon$$

Quitte à augmenter A, on peut supposer que ϕ est à support dans $[-A, A]$. On considère alors une fonction ψ $2A$-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\psi|_{[-A,A]} = \phi|_{[-A,A]} \text{ et } ||\psi||_\infty = ||\phi||_\infty$$

D'après le théorème de Féjer, il existe un polynôme trigonométrique P tel que :

$$||\psi - P||_\infty \leq \epsilon$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
|\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx| &\leq |\int_{\mathbb{R}} f(x)(\phi(x) - \psi(x))dx| + |\int_{\mathbb{R}} f(x)\psi(x)dx| \\
&\leq |\int_{|x|\geq A} f(x)(\phi(x) - \psi(x))dx| + |\int_{\mathbb{R}} f(x)(\psi(x) - P(x))dx| \text{ car } \mathcal{F}(f) = 0 \\
&\leq |\int_{|x|\geq A} -f(x)\psi(x)dx| + |\int_{\mathbb{R}} f(x)(\psi(x) - P(x))dx| \text{ car } \phi \text{ est à support dans } [-A, A] \\
&\leq ||\psi||_\infty \int_{|x|\geq A} |f(x)|dx + ||\psi - P||_\infty \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \\
&\leq \epsilon(||\phi||_\infty + ||f||_1)
\end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant tendre ϵ vers 0 □