209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

I/ Convergence simple

1- convergence simple en un nombre fini de point.

prop 1 : pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $(n+1)$ réels distincts $(x_0, \dots, x_n)$ et $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P_n(x_i) = y_i$, appelé polynome d'interpolation de Lagrange.

def 2 : avec les notations précédentes, on pose
$$L_i := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

prop 3 : le polynome de la prop 1 est $\sum_{i=0}^{n} y_i L_i$

rem 4 : en cas d'ajout de point, il faut tout recalculer.

prop 5 : avec les notations précédentes, il existe un unique $(n+1)$uplet $(a_0, \dots, a_n)$ tel que
$$P_n = a_0 + a_1(X - x_0) + a_2(X - x_0)(X - x_1) + \dots + a_n(X - x_0)\dots(X - x_{n-1})$$

def 6 : soit $f \in \mathcal{C}^0$, on définit par récurrence
- $f[x_i] = f(x_i)$
- $f[x_0, \dots, x_{k+1}] = \dfrac{f[x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_0, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0}$

avec $(x_i)_{i=0}^{n}$ des points distincts.

prop 7 : si on prend $y_i = f(x_i)$, alors le polynome d'interpolation de Lagrange vaut $P_n = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$

2- convergence simple globale sur un segment $[a, b]$

def 8 : on définit $\Pi_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ où $x \in \mathbb{R}$

thm 9 : on suppose $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathbb{R})$ et $(x_i)_{i=0}^{n} \in [a,b]$, alors pour $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in [a,b]$,
$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x)$$

rem 10 : le choix des points est important pour majorer la norme infini de Π_{n+1}. Par exemple,
- points équidistants : $\|\Pi_{n+1}\| \leq \left(\dfrac{b-a}{e}\right)^{n+1}$
- points de Tchebychev : $\|\Pi_{n+1}\| \leq 2 \left(\dfrac{b-a}{4}\right)^{n+1}$. Dans ce cas,

les $(x_i)_{i=0}^{n}$ sont $x_i = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2} \cos\left(\dfrac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$

def 11 : on appelle $T_n \in \mathbb{R}[X]$ l'unique polynome vérifiant
$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \ \forall \theta \in \mathbb{R}$$

prop 12 :
- les polynomes vérifient la formule de récurrence suivante
$$\begin{cases} T_0 = 1, \ T_1 = X \\ T_{n+1} = 2X T_n - T_{n-1} \end{cases}$$
- $\deg T_n = n$
- le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

rem 13 : pour $[a,b] = [-1, 1]$, les points de Tchebychev $(x_i)_{i=0}^{n}$ sont les racines du polynome T_{n+1}.

prop 14 : [annexe 1] pour $\alpha > 0$, on définit $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^2 + \alpha^2}$ pour $x \in [-1, 1]$

alors il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $\alpha < \alpha_0$, la suite des polynomes de Lagrange pour les points équidistants ne converge pas simplement vers f_α.

3- Convergence de polynomes trigonométriques.

def 15 : pour $f \in L^1_{loc}$, 2π périodique, et $n \in \mathbb{Z}$, on pose
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt.$$

def 16 : on appelle série de Fourier partielle de f d'ordre N, la somme
$$S_N(f)(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e^{ikt} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

prop 17 : • pour $f \in L^1_{loc}$, on a $c_n(f) = o_n(1)$

• si $f \in \mathcal{C}^k$, alors $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$

cor 18 : si $f \in \mathcal{C}^2$, alors la série de Fourier de f converge absolument.

def 19 on définit le noyau de Dirichlet

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \begin{cases} \forall N \in \mathbb{N}^* \\ t \notin 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

rem 20 : on a $S_N(f) = D_N * f$, pour $N \in \mathbb{N}^*$.

thm 21 : (de Dirichlet) soit $f \in L^1_{loc}$ et $x \in [0, 2\pi]$ tel que f admet une limite finie à gauche $f(x^-)$ et à droite $f(x^+)$ et que les fonctions $t \mapsto \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t}$ et $t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t}$ sont bornées au voisinage de $t = 0^+$ alors

$$(D_N * f)(x) \longrightarrow \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

rem 22 : si $f \in \mathcal{C}^1$, sa série de Fourier converge, ie

$$D_N * f \xrightarrow{CS} f.$$

prop 23 : il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction 2π périodique dont la série de Fourier ne converge pas en $t = 0$.

II/ Approximation uniforme.

1- approximation de fonction très régulière.

thm 24 : une fonction holomorphe sur un $D(0, R)$ avec $R > 0$ ou $R = +\infty$ est développable en série entière (DSE) sur ce disque.

rem 25 : les séries entières sont des limites uniformes de polynômes sur tous disques compacts.

thm 26 : soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ une fonction DSE sur $]-R, R[$, alors les polynômes d'interpolation P_n (pour un choix arbitraire de points) sur $[a,b] \subseteq]-R, R[$ convergent uniformément vers f pourvu que $R > \frac{3}{2}(b-a)$.

rem 27 : l'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer le caractère analytique d'une fonction et de contrôler l'erreur commise quand on approche une fonction par son développement de Taylor-Young

2- Convergence uniforme des séries de Fourier

def 28 : le noyau de Fejer est la moyenne de Césaro du noyau de Dirichlet

$$K_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} D_k(t)$$
$$= \frac{\left(\sin \frac{N+1}{2}t\right)^2}{N\left(\sin \frac{t}{2}\right)^2}, \text{ pour } t \notin 2\pi\mathbb{Z}$$

thm 29 : si $f \in \mathcal{C}^0$ 2π périodique, alors

$$\|f - K_N * f\|_\infty \to 0.$$

cor 30 : si $f \in \mathcal{C}^0$ et si sa série de Fourier converge alors la série coïncide avec f partout.

cor 31 : $\mathcal{F} : (\mathcal{C}^0, \|\cdot\|_1) \to (c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$ est continue, injective
$f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ et non surjective.

thm 32 : soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique. Il existe une fonction continue $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ (2π périodique en la 1^{re} variable), de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$ et solution de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x^2 u \\ u(x,0) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

DEV 1

3- approximation par des polynômes

thm 33 soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, alors il existe une suite $Q_n \in \mathbb{R}[X]$,

$$\|f - Q_n\|_\infty \to 0.$$

app 34: • soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0$ alors f est nulle.

• $L^1([0,1], \mathbb{C})$ est séparable.

• Taubérien (fort) : soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que la série $(\sum_{n\geq 0} a_n z^n)$ a un rayon de convergence $R = 1$. Notons f, la valeur de la série sur $D(0,1)$. Si $f(x) \xrightarrow[x \in \mathbb{R}]{x \to 1} \ell \in \mathbb{C}$ et si $a_n = O(\frac{1}{n})$ alors $(\sum_{n\geq 0} a_n)$ converge et $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

rem 35: la démonstration du théorème de Weierstraß utilisant le théorème de Féjer ne donne pas une manière agréable d'obtenir ces polynômes d'approximation.

prop 36: définissons $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$ pour $\begin{cases} f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \\ x \in [0,1]. \end{cases}$

alors $B_n \xrightarrow{CU} f$.

prop 37: pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$

$$\|f - Q\|_\infty = \min_{R \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - R\|_\infty$$

lem 38: soit $(\nu_n)_n$ une suite de mesure sur $\mathbb{R}$ et ν une mesure à support compact tel que $\int_{\mathbb{R}} x^k d\nu_n \to \int_{\mathbb{R}} x^k d\nu$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors ν_n converge en loi vers ν.

prop 39: soit $(X_n)_n$ une suite de va iid de loi $\mathbb{P}$. On introduit la mesure empirique $\mathbb{P}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$. On a le résultat

$$ps \quad \mathbb{P}_n \overset{loi}{\Longrightarrow} \mathbb{P}$$

DEV 2

III/ Convergence en moyenne.

1- convergence L^p $(1 \leq p < +\infty)$ des séries trigonométriques.

thm 40: soit $f \in L^p_{loc}$ 2π périodique

$$K_N * f \xrightarrow{L^p} f$$

cor 41: $\mathcal{F} : (L^1, \|\cdot\|_1) \to (c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$ est continue, injective et non surjective
$f \mapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$

2- le cadre $L^2(0, 2\pi)$

cor 42: $(e_n : t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(0, 2\pi)$.

prop 43: en particulier, pour tout $f \in L^2(0, 2\pi)$,

• $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

• $f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$

• $\langle f, g \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}$.

app 44: pour $f = \mathbb{1}_{[0,\pi]} - \mathbb{1}_{[\pi, 2\pi]}$, on montre $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3- polynômes orthogonaux avec $I \subseteq \mathbb{R}$.

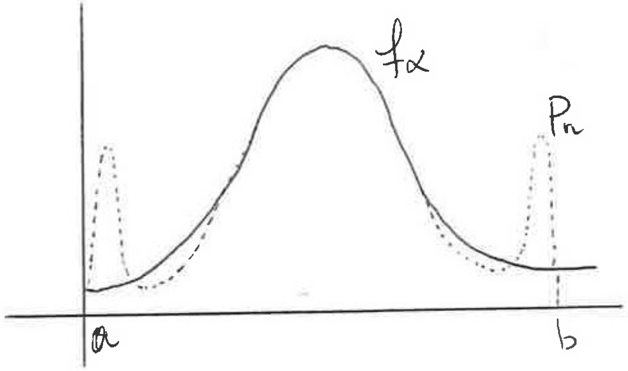
def 45: on appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x^n| \rho(x)\,dx < +\infty$.

def 46: on note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions mesurable selon la mesure $\rho(x)dx$ et on le munit du produit scalaire
$$\int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x)\,dx.$$

prop 47: il existe une unique famille de polynômes unitaires $(P_n)_n$ orthogonaux vérifiant $\deg P_n = n$.

thm 48: s'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$, alors cette famille est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Annexe 1 : Phénomène de Runge.



Références :

Pour le I et le Th 26 : Demailly

Pour tout ce qui est polynômes trigonométriques : Zuily-Queffélec