209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières, exemples et applications.

I Approximation polynomiale

a) Densité dans C^0

Thm 1 : (Weierstrass) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on définit $B_n(x) = \sum_k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ le n-ième polynôme de Bernstein. Alors B_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$

Rq 2 : On a ainsi une suite explicite de polynômes convergeant uniformément vers f

App 3 : Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, C^0 vérifie $\int_0^1 f^n(t)\,dt = 0$ alors $f \equiv 0$

Rq 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, C^0 on peut obtenir une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur tout compact mais pas sur $\mathbb{R}$ car la limite uniforme d'une suite de polynôme est une suite de polynôme.

Thm 5 (Müntz) : $I = [a,b]$ Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante à valeurs positives alors $\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n})$ est dense dans $C([0,1])$

pour $\|.\|_2 \iff \sum 1/\alpha_n$ diverge

pour $\|.\|_\infty \iff \sum 1/\alpha_n$ diverge et $\lim \alpha_n > 1$

b) Densité dans $L^2(I,\rho)$

def 6 On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. On le munit du produit scalaire $\langle f,g \rangle = \int_I f(x)\overline{g}(x)\rho(x)\,dx$, c'est un espace de Hilbert contenant les fonctions polynomiales.

Prop 7 . Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux, unitaire tel que $\deg P_n = n$ c'est la famille de polynômes orthogonaux associé à ρ.

Elle est obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Th 8 Si il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$ alors (P_n) est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

c) Interpolation polynomiale

def 10 Soient $x_1, \dots, x_n$, n réels distincts et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle polynôme interpolateur de Lagrange des y_i et les x_i tout polynôme P_n tel que $\forall i \; P_n(x_i) = y_i$ et $\deg P_n \leq n$.

Prop 11 Il y a existence et unicité du polynôme interpolateur de Lagrange

Prop 12 : Formule d'erreur. Soit $f \in C^{n+1}([a,b])$ P_n le polynôme interpolateur des $f(x_i)$ & les x_i alors
$$\|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|\Pi_{n+1}\|_\infty}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$
avec $\Pi_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$

Prop 13 : $\|\Pi_{n+1}\|_\infty \leq (b-a)^{n+1}$

Prop 14 : Si on choisit les x_i équidistants on a $\|\Pi_{n+1}\|_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}\right)$

Rq 15 : (Phénomène de Runge) Pour les x_i équidistants on peut ne pas avoir de convergence uniforme.
Considérer $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$

def 16 : $I = [-1,1]$ on pose $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+1}\pi\right)$ appelés point d'interpolation de Tchebychev

Prop 17 : On a alors $\|\Pi_{n+1}\|_\infty = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$

d) "Approximation locale"

Prop 18 (Taylor-Young) : Soit $f : I \to \mathbb{C} \in D^n$ alors
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(h^n)$$

Th 19 : (Inégalité de Taylor-Lagrange) Soit f C^n sur $[a,b]$ et D^{n+1} sur $]a,b[$ avec $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M$ alors
$$\left|f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

II Approximation par des fonctions C^∞ et convolution

a) Produit de convolution

Def 20 : f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ et on définit la convolée de f et g.
$$f * g(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$$

Prop 21 : $f*g$ a un sens si
- $f, g \in L^1$ et alors $f*g \in L^1$
- $f, g \in L^\infty \times L^1$ et alors $f*g \in L^\infty$
- f est bornée sur tout compact et $g \in L^1$ à support compact alors $f*g$ est défini pour tout x.

Th 22 : $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact, Alors $f*g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et
$$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g \quad \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k$$

App 23 : Si P est un polynome de degré n et $g \in L^1$ alors $P*g$ est un polynome de degré n.

Prop 24 :
- $\mathrm{supp}(f*g) \subset \overline{\mathrm{supp} f + \mathrm{supp}\, g}$
- $\mathrm{supp} f$ compacte $\Rightarrow$ $\mathrm{supp}\, f*g \subset \mathrm{supp} f + \mathrm{supp}\, g$.
- f et g à support compact $\Rightarrow$ $f*g$ aussi

b) Théorème de densité

Th 25 :
- Pour $k \in \mathbb{N}$, $C^k_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.
- pour $1 \leq p < +\infty$ $L^p_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

Prop 26 : $\exists \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que
- $\rho \geq 0$
- $\mathrm{supp}\, \rho \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$
- $\int \rho(x)\, dx = 1$

Def 27 : (Unité approchée de la convolution) : $\varepsilon > 0$ $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$
- $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
- $\mathrm{supp}\, \rho_\varepsilon \subset \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \varepsilon\}$
- $\int \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$.

Prop 28 : Soit $f \in C^0_c$ alors $\rho_\varepsilon * f$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^n$
$f \in L^p_c(\mathbb{R}^n)$ alors $\rho_\varepsilon * f$ converge vers f dans L^p $(1 \leq p < +\infty)$

Prop 29 : Soit $f \in L^p_c(\mathbb{R}^n)$ et $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $|z_0| \leq 1$ alors
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f(\cdot - \varepsilon z_0) - f\|_{L^p} = 0$$

Théorème 30 : Pour $k \in \mathbb{N}$, $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $C^k(\mathbb{R}^n)$
Pour $1 \leq p < +\infty$ $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

III Approximation de fonctions périodiques.

a) : série de Fourier et cadre

Cadre : $(L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \langle\,,\rangle)$ avec $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$

Def 31 : $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, c'est une famille orthonormée
On appelle polynôme trigonométrique une combinaison linéaire des e_n

def 32 Pour $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \langle f, e_n\rangle$

Rq 33 : Pour $P = \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n$ on a $c_n(P) = c_n$.

def 34 : $S_N(f) := \sum_{-N}^{N} c_n(f) e_n$ est la somme partielle d'indice n

Prop 35 : $c_n(f') = in\, c_n(f)$ pour $f \in C^1$

Prop 36 $S_N(f)$ est donc le projeté orthogonal de f sur $\mathrm{Vect}(e_n, |n| \le N)$ qui converge dans L^2 vers le projeté orthogonal sur $\overline{\mathrm{Vect}(e_n)}$

~~Prop 37~~ :

Prop 37 (Riemann - Lebesgue) $|c_n(f)| \xrightarrow[|n|\to+\infty]{} 0$

Prop 38 (Inégalité de Bessel) : $\sum_n |c_n(f)|^2 \le \|f\|_2^2$

b) Densité

def 39 : On pose $D_N = \sum_{-N}^{N} e_n$ et $K_N = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n$

Th 40 : (Féjer)

Pour $f \in C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$: $\|K_n * f\|_\infty \le \|f\|_\infty$ et $K_n * f \to f$ uniformément

$f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$: $\|K_n * f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$ et $K_n * f \xrightarrow[L^p]{} f$

$p < +\infty$

Prop 41 : les polynômes trigonométriques sont dense dans $C^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ pour $\|.\|_\infty$ et donc dans L^2.

App 42 $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$

Thm 43 (Parceval)

Pour $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ on a $\sum_n |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$

App 44 : on note $f(x) = \frac{\pi}{4}(\mathbb{1}_{[0,\frac{\pi}{2}[} - \mathbb{1}_{]\frac{\pi}{2},\pi]})$

On obtient $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2l+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

c) Résultats de convergence

Th 45 : Si f est continue et si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$ alors $S_N(f)$ converge uniformément vers f

Prop 46 : Si f est de classe C^1 alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$

Th 47 : $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ qui admet en x une limite à gauche et à droite alors $S_N(f)(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{f^+(x)+f^-(x)}{2}$

Th 48 (Dirichlet) Si f est C^0 et C^1 par morceaux alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f.