Au XIX^e siècle, les travaux sur les EDP ou les équations intégrales du type $u(x) + \int_a^b K(x,y)u(y)\,dy = f(x)$ où u est inconnue donnent naissance à la théorie des espaces de Banach et de Hilbert. C'est Fredholm puis Hilbert qui les premiers utilisent des principes d'algèbre linéaire et de géométrie dans des espaces fonctionnels.

I. Géométrie en dimension infinie. $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

H est un Kev et $\langle .,. \rangle : H \times H \to K$ une forme bilinéaire (sesquilinéaire) définie positive : un produit scalaire (hermitien) noté ps.

1. Définitions et premières identités.

$x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle} := \|x\|$ définit la "norme associée au p.s".

déf 1 : orthogonalité : $x \perp y \iff \langle x,y\rangle = 0$

Pour toute partie A de H, $A^\perp := \{x \in H, \forall a \in A, \langle x,a\rangle = 0\}$

Prop 1 : $\forall x,y \in H$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$

- $\langle x,y\rangle = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ [Pythagore]
- $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $\langle x_i,x_j\rangle = \delta_{ij}\|x_i\|^2 \Rightarrow \|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$

Prop 2. [Médiane] $\forall x,y \in H$,

(i) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

(ii) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$

Prop 3 : [Cauchy-Schwarz] $\forall \langle .,.\rangle$ ps sur H, $\|\cdot\|$ définit une norme sur H et $\forall x,y \in H$, $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ avec égalité ssi x et y sont colinéaires.

Application 4 : $\|x\| = \sup_{\|y\|=1} \langle x,y\rangle$ et $\langle .,.\rangle : H^2 \to K$ est continue

d'où $A^\perp$ est fermée comme intersection de noyaux de formes linéaires continues.

Déf 5 : Un espace préhilbertien est un Kev muni d'un ps. Deux tels espaces H_1 et H_2 sont isomorphes ssi il existe $\varphi : H_1 \to H_2$ isomorphisme d'ev tel que : $\langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle_{H_2} = \langle x,y\rangle_{H_1}$

Si H est complet pour la norme associée, c'est un espace de Hilbert.

exemples 6 :

- $\mathbb{C}^n$ muni de $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$
- soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré non vide, alors $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ muni de $\langle f,g\rangle = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,\mu(dx)$ séparable dès que μ est σ-finie et $\mathcal{A}$ engendrée par une partie dénombrable. Application : $\forall p \in [1,\infty[$ $\forall F$ sev fermé de L^p / $F \subset L^\infty$ alors $\dim F < \infty$ [DEV 1]
- $\ell^2(H) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H \,/\, \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2 < \infty\}$ séparable si H l'est.

remarque 7 : on peut plonger tout espace préhilbertien dans un espace de Hilbert : dans la suite, H est un Hilbert.

2. Projection sur un convexe fermé

Th 8 : Soit C un convexe fermé non vide de H.

Alors : $\forall x \in H$, $\exists!\, y := p_C(x) \in C \,/\, \|x-y\| = \min_{z\in C} \|x-z\|$

De plus : $p_C \circ p_C = p_C$ et p_C est 1-lipschitzienne.

Prop 9 : Soit $x \in H$,

(i) $c = p_C(x) \in C \iff \mathrm{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0 \quad \forall z \in C$

(ii) si C est un sev fermé de H : $p_C \in \mathcal{L}_c(H)$ et $\sup_{\|x\|=1} \|p_C(x)\| = |||p_C||| \leq 1$ [FIG 2]

$p_C(x) = c \in C \iff \forall z \in C, \langle x-y, z\rangle = 0$

rq : l'existence et l'unicité des projections sont cruciales dans les Hilbert [FIG 3]

Cor 10 : E sev de H.

- si E est fermé alors $E^\perp$ est un supplémentaire fermé de E.
- $\bar{E} = H \iff E^\perp = \{0\}$

rq $E \subset (E^\perp)^\perp$ avec égalité ssi E est fermé.

3. Dualité dans les Hilberts.

On note $\bar{H}$ l'espace conjugué de E où l'on a remplacé la multiplication par un scalaire par $\lambda . x = \bar{\lambda} x$

Th 11: [Riesz Fréchet]

$$J \begin{cases} H \longrightarrow (\bar{H})' \\ x \longmapsto [y \to \langle x,y \rangle] \end{cases}$$ est une isométrie linéaire et bijective

Cor 12: Soit φ $H \times H \to K$ forme sesquilinéaire (bilinéaire) continue. Alors : $\exists! u \in \mathcal{L}_c(H) / \forall x,y \in H$,

$$\langle u(x), y \rangle = \varphi(x,y)$$

Rappel 13: Soit φ $H \times H \to K$ forme sesquilinéaire.

φ continue $\Leftrightarrow \exists c > 0 / \forall x,y \in H, |\varphi(x,y)| \leq c \|x\| . \|y\|$

φ coercive $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0 / \forall x \in H, \varphi(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$

Th 14: [Lax Milgram] [BRE]

Soit φ $H \times H \to \mathbb{C}$ continue coercive sesquilinéaire.

$\forall \psi \in \bar{H}', \exists! u \in H / \forall v \in H, \varphi(u,v) = \psi(v)$

De plus, si φ est hermitienne : u est l'unique élément de H tel que :

$$\frac{1}{2}\varphi(u,u) - \mathrm{Re}\,\psi(u) = \min_{v \in H} \left[\frac{1}{2}\varphi(v,v) - \mathrm{Re}\,\psi(v)\right]$$

Th 15: Soit φ $H \times H \to \mathbb{C}$ continue coercive sesquilinéaire, C un convexe fermé non vide de H.

$\forall \psi \in \bar{H}', \exists! u \in C / \forall v \in C, \mathrm{Re}\,\varphi(u, v-u) \geq \mathrm{Re}\,\psi(v-u)$

De plus, si φ est hermitienne, u est l'unique élément de H tel que :

$$\frac{1}{2}\varphi(u,u) - \mathrm{Re}\,\psi(u) = \min_{v \in H} \left[\frac{1}{2}\varphi(v,v) - \mathrm{Re}\,\psi(v)\right]$$

[Stampacchia]

II. Analyse hilbertienne. [COL]

1. Bases hilbertiennes.

Def 16: Soit H un Hilbert séparable de dimension infinie. Une famille orthonormale dénombrable $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de H telle que $\overline{\mathrm{Vect}_K (e_i)_{i \in I}} = H$ est appelée base hilbertienne de H. (BH)

Th 17: Soit $(e_i)_{i \in I}$ BH de H. Alors : [Parseval]

- $\forall x \in H, (\langle e_i, x \rangle)_{i \in I} \in \ell^2(I)$ et $\sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2 = \|x\|^2$
- si $(x_i) \in \ell^2(H)$, alors $\sum x_i e_i$ converge dans H et sa somme x vérifie $\langle e_i, x \rangle = x_i$.

Rq: si H admet une base hilbertienne, alors H est séparable.

Prop 18: Si H est séparable, il admet des BH.

Prop 19: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale dénombrable

(e_i) BH $\Longleftrightarrow (e_i)^{\perp} = \{0\}$

Exemple 20: Si $f \in L^2(\mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}})$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\cdot}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$

Parseval donne la TF inverse : $f = \sum c_n(f) e_n$.

Application 21: $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi ; \pi]$, $c_0(f) = \frac{2}{3}$

et $|c_n(f)| = \frac{2}{n^2\pi^2}$ si $n \neq 0$ et $\|f\|_2^2 = \frac{8}{15}$

d'où : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Exemple 21: $\phi(t) = \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{2}]}(t) - \mathbb{1}_{]\frac{1}{2},1]}(t)$

et $\phi_{m,k}(t) = 2^{m/2}\phi(2^m t - k)$, $\psi_k = \mathbb{1}_{]k,k+1]}(t)$

$(\phi_{m,k})_{k,m \in \mathbb{N}} \cup (\psi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une BH de $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}, dt)$

[BRE]

2. Opérateurs compacts et autoadjoints.

déf 22 : Soient E, F 2 evn et $B = \{x \in E \,/\, \|x\| \leq 1\}$

$u \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact $\Leftrightarrow$ $u(B)$ est d'adhérence compacte (pour la topologie forte)

expl 23 : soit X un métrique compact et $E = (\mathcal{C}(X,\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$

$K_\mu f(x) = \int_X N(x,y) f(y) \mu(dy)$ où $\begin{cases} N \in \mathcal{C}(X \times X, \mathbb{C}) \\ \mu \text{ mesure positive} \end{cases}$

borélienne finie sur X.

déf 23 : Soit $u \in \mathcal{L}(H)$, u est autoadjoint ssi $u = u^*$

(ie) $\forall x, y \in H$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

expl 24 : $K_N^* = K_{N^*}$ donc K_N autoadjoint ssi :

$$N(x,y) = \overline{N(y,x)}.$$

[DEV2]

Th 25 : [RIESZ] Soit $u \in \mathcal{L}(H)$ compact symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, normal si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ($uu^* = u^*u$) et Λ ses valeurs propres.

Alors :
- soit Λ est fini, soit $\Lambda = \{\lambda_n\}$ avec $\lambda_n \to 0$
- $\forall \lambda \in \Lambda$, $|\lambda| \leq \|u\|$, atteint en un $\lambda_0 \in \Lambda$
- $\forall$ espace propre E_λ, $\dim E_\lambda < \infty$ et $E_\lambda \perp E_\mu$ si $\lambda \neq \mu$
- H est somme hilbertienne de $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

III. Résoudre l'équation de Poisson $-\Delta u = f$.

1. Formulation faible.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$

déf : on note : $W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \,/\, \exists v \in L^2(\Omega), \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega v\varphi\}$*

Prop 26 : $W^{1,2}(\Omega)$ muni de $\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv + \int_\Omega u'v'$ est un espace de Hilbert séparable.

On note : $W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}$ qui est un Hilbert

On va chercher une solution faible de $-\Delta u = f$.

(ie) Trouver $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tel que $\begin{cases} \int_\Omega u'v' = \int_\Omega f v \\ \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \end{cases}$

Th 27 : il existe $c > 0$ / $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2} \leq c \|u'\|_{L^2}$$

Th 28 : Toute suite bornée de $W_0^{1,2}(\Omega)$ admet une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$

2. Opérateur de Green.

On pose :

$\forall u, v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $a(u,v) = \langle u', v' \rangle_{L^2}$ et $\varphi(u) = \langle f, v \rangle_{L^2}$

et $L(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - \mathrm{Re}\, \varphi(u)$

a est une forme sesquilinéaire continue coercive avec Lax Milgram :

Prop 29 L est continue convexe strictement et $|L(v)| \xrightarrow[|v| \to +\infty]{} +\infty$. De plus, L admet 1 unique minimum

Prop 30 L'opérateur de Green $G \begin{cases} L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ f \longmapsto u = \min_{v \in W_0^{1,2}} L(v) \end{cases}$

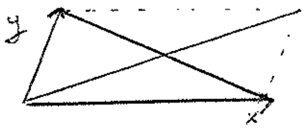
est linéaire continue compact d'image contenue dans $W_0^{1,2}(\Omega)$

Th 31 : Il existe une suite $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ croissante telle que $\lambda_i \xrightarrow[i \to \infty]{} +\infty$ et une base hilbertienne $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ telle que, $\forall i \in \mathbb{N}$, f_i soit solution faible de $-\Delta f_i = \lambda_i f_i$

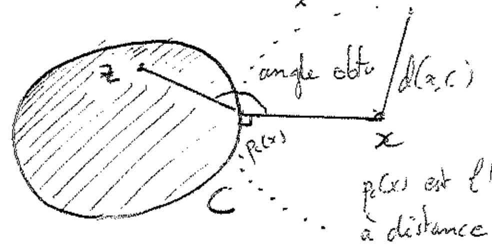
* $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})$ fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

FIGURES.

(1)

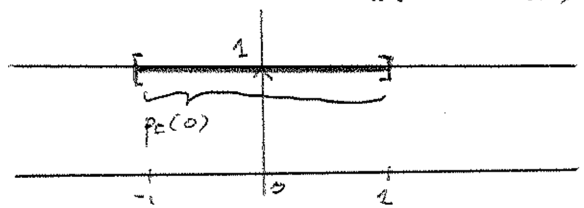


(2)



$p_C(x)$ est l'unique point à distance $d(x,C)$ de x dans C.

(3)



C

dans $(\mathbb{R}^2, |\cdot|_\infty)$

Références: [COL] Éléments d'Analyse et d'Algèbre, Pierre Colmez

[BRE] Brézis Analyse fonctionnelle.

[HL] Hirsch-Lacombe Éléments d'analyse fonctionnelle.

Autres développements possibles :

- Th de Stampacchia.

Autre application : problèmes inverses en statistique

si $A \in \mathcal{L}_c(H_1, H_2)$, on s'intéresse au modèle :

$$Y = Af + \varepsilon \xi \quad \text{où } \xi \text{ est un bruit blanc}$$

But : reconstruire f à partir des observations bruitées de Af.

On utilise une méthode dite SVD : décomposition en valeurs singulières, basée sur le

Th : SVD

Soit A un opérateur compact, alors il existe 2 bases hilbertiennes (e_k) et (f_k) de H_1 et H_2 et une suite $(\lambda_k)_k$ / $\lambda_k \to 0$ tq :

$$\begin{cases} Ae_k = \lambda_k f_k \\ A^* f_k = \lambda_k e_k \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A^*A e_k = \lambda_k^2 e_k \\ AA^* f_k = \lambda_k^2 f_k \end{cases}$$

(e_k, f_k, λ_k) est appelé système singulier associé à A.

alors : $\langle Y, f_k \rangle = \langle Af, f_k \rangle + \varepsilon \xi_k$

(ie) $y_k = \lambda_k \langle f, e_k \rangle + \varepsilon \xi_k$

$= \lambda_k \theta_k + \varepsilon_k \qquad \varepsilon_k \sim \mathcal{N}(0, \varepsilon^2)$

Les (θ_k) sont les coefficients de f, que l'on estime par :

$$\hat{\theta}_k = \frac{y_k}{\lambda_k}$$

comme $\lambda_k \to 0$, on perd de + en + d'information au profit du bruit qui devient prépondérant.