213. Espace de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

[H-L]

I. Généralités.

A. Définitions et premières propriétés

H un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Def 1. Un produit scalaire est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ vérifiant : $\forall y \in H : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire, $\forall x \in H$ $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$ $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ et :

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé Espace préhilbertien.

Rque. Si $\dim H < +\infty$, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

Exemples 2. i) $H = \mathbb{R}^d$ $\forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$ est un P.S.

ii) $H = C^0([0, 1])$. $\forall f, g \in H$: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$.

iii) $H = \ell^2(\mathbb{C})$ $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n \geq 0} a_n \overline{b_n}$

Prop 3. Inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall x, y \in (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$: $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

Corollaire 4. $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur H

Prop. 5. Identité du Parallélogramme.

$(H, \|\cdot\|)$ est un espace préhilbertien si et seulement si :

$\forall (x, y) \in H^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

Dans ce cas le P.S est donné par : $\forall (x, y) \in H^2$

$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$.

Def 6. i) $(x, y) \in H^2$ sont dits orthogonaux si : $\langle x, y \rangle = 0$.

ii) Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite orthonormée si : $\forall i, j : \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

iii) Si $F \subset H$. On note $F^\perp = \{ y \in H : \forall x \in F \ \langle x, y \rangle = 0 \}$. C'est un sous e.v fermé de H.

Prop 7. Pythagore

$x, y \in H$ orthogonaux $\implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Rque : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on a équivalence.

Prop 8. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(e_i)_{i=0,..,n}$ une famille libre de H. On pose $\tilde{u}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ et $\forall k$ $u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \langle e_{k+1}, u_i \rangle$, $\tilde{u}_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$. Alors, $(\tilde{u}_k)$ est une famille orthonormée telle que : $\mathrm{Vect}(\tilde{u}_i ; i \leq k) = \mathrm{Vect}(e_i ; i \leq k)$

Def 9. $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert s'il est complet pour $\|\cdot\|$.

Exemples 10 i) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un Hilbert.

ii) $\ell^2(\mathbb{C})$

iii) $L^2([0, 2\pi])$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g}(t) \frac{dt}{2\pi}$

B. Projection sur un convexe fermé

H est un espace de Hilbert.

Théorème 11 Soit C un convexe non vide de H. Alors, pour tout $x \in H$ il existe un unique point $P_C(x) \in C$: $\|x - P_C(x)\| = d(x, C)$

$P_C(x)$ est la projection de x sur C et est caractérisée par :

$\forall z \in C$ $\mathrm{Re} \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$ [DVP 2]

De plus, $P_C : H \to H$ est 1-lipschitzienne.

Prop. 12. Si F est un sev de H alors P_F est un opérateur linéaire de H sur F. Si $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique élément vérifiant :

$P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$

Corollaire 13 i) $\forall F \subset H$ sev fermé : $H = F \oplus F^\perp$ et P_F est le projecteur associé

ii) F sev de H : $H = \overline{F} \oplus F^\perp$. En particulier :

F est dense dans $H \iff F^\perp = \{0\}$. De plus : $\overline{F} = F^{\perp\perp}$

Contre-exemple 14. Si F n'est pas fermé : $H = \ell^2(\mathbb{N})$. $F = \{$Suites nulles à partir d'un certain rang$\}$. F n'est pas fermé $(\overline{F} = H)$ et on n'a pas : $H = F \oplus F^\perp$. [O-A]

Application 15. Hahn Banach géométrique

Soient A et B deux convexes non vides de H hilbert réel tels que : $A \cap B = \emptyset$, A est fermé, B est compact. Alors, il existe un hyperplan qui sépare strictement A et B, i.e :

$\exists f \in H'$: $\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x)$

[H-L] C. Dualité

Théorème 16. Riesz
$$\phi : H \longrightarrow H'$$
$$y \longmapsto (x \mapsto \langle x, y\rangle)$$ est une isométrie surjective.

Si $f \in H'$: $\exists ! y \in H$, $\forall x \in H$ $f(x) = \langle x, y\rangle$ et $\|f\|_{H'} = \|y\|$.

Application 17 Soit F un sev de H. Soit $f \in F'$. Alors, il existe $\bar f \in H'$ vérifiant : $\bar f_{|F} = f$ et $\|f\|_{F'} = \|\bar f\|_{H'}$

Application : Adjoint d'un endomorphisme

Prop 18 $\forall T \in \mathcal{L}_c(H)$, $\exists ! T^* \in \mathcal{L}_c(H)$: $\forall x, y \in H$ $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$

T^* est l'adjoint de T. On a : $\|T\| = \|T^*\|$.

Prop 19. $\mathcal{L}_c(H) \longrightarrow \mathcal{L}_c(H)$, $T \longmapsto T^*$ est une isométrie involutive.

On a : $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$

Exemple 20 Opérateur à noyau

Soit $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$. $H = L^2([0,1])$. On définit :

$T_K : f \in H \longmapsto (x \longmapsto \int_0^1 K(x,y) f(y)dy)$. T_K est linéaire, continue à valeurs dans H et : $T_K^* = T_{K^*}$ où $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$

Def 21 $T \in \mathcal{L}_c(H)$ est auto-adjoint si : $T^* = T$

Exemple 22 . $\forall T \in \mathcal{L}_c(H)$: TT^* et T^*T sont auto-adjoints.

. T_K est auto-adjoint $\Leftrightarrow K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ p.p.

. Tout projecteur orthogonal est auto-adjoint

Rque. Si $\dim H < +\infty$ et si $T^* = T$ alors T est diagonalisable.

II Bases hilbertiennes.

[BRE] A. Définition et propriétés

Def 23 On appelle base hilbertienne une suite $(e_i)_{i\in I}$ de H vérifiant :

-) $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée

-) $(e_i)_{i\in I}$ est totale : $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_i, i\in I)}$

Exemple 24 $H = \ell^2(\mathbb{N})$. On définit $(e^n)_n$ par : $e^n_n = 1$, $e^n_m = 0$ $m \neq n$.

Alors $(e^n)_n$ est une base hilbertienne de H.

Théorème 25 Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.

Théorème 26. H Hilbert séparable. Soit $(e_n)_n$ une famille orthonormée de H. On a les équivalences suivantes :

i) $(e_n)_n$ est une base hilbertienne

ii) $\forall x \in H$: $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$

iii) $\forall x \in H$: $\|x\|^2 = \sum_{n\geq 0} |\langle x, e_n\rangle|^2$ Egalité de Parseval

Application 27 Si $F \subset H$ est un sev, On note $(e_n)_n$ une base hilbertienne de H et $J \subset \mathbb{N}$ tel que : $\overline{\mathrm{Vect}(e_j, j\in J)} = F$. Alors :

$\forall x \in H$: $P_F(x) = \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j$

Rque 28 : On définit : $\phi : H \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $x \longmapsto (\langle x, e_n\rangle)_n$ c'est une isométrie surjective.

ℓ^2 est l'archétype des espaces de Hilbert séparables.

B Exemple. bases hilbertiennes de $L^2_{2\pi}$ [R-O]

a) Séries de Fourier

On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. $H = L^2(\mathbb{T})$, $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\bar g(x) \frac{dx}{2\pi}$

Def 29. i) Coefficients de Fourier : $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \langle f, e_n\rangle$ où $e_n : x \mapsto e^{inx}$

ii) Somme partielle de Fourier. $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$

Exemple 30 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique égale à : $x \mapsto \frac{1-x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$

Alors : $c_0(f) = \frac{4}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}^*$: $c_n(f) = (-1)^{n+1}\frac{4}{n^2\pi^2}$

Théorème 31 $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$

Corollaire 32 i) $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $f \overset{L^2}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$

ii) $\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Application 33 Grâce à l'ex 30 : Calcul de : $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Théorème 34 Convergence Normale. Soit $f \in L(\mathbb{T})$. Si de plus $f \in C^0_{2\pi} \cap C^1_{pm}$ alors $\sum c_n(f) e_n$ converge normalement vers f.

213. Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Application 35. Équation de la chaleur sur un anneau.
Soit $u_0 \in C^0_{2\pi} \cap C^2_{pm}$. Alors, il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ 2π-périodique en x et $C^{\infty}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[O-A] **II) Polynômes orthogonaux.**

Def 36. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On appelle fonction poids : $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable strictement positive telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < \infty$

Prop 37. $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert

Prop/Def 38. Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes orthogonaux unitaires tels que : $\deg P_n = n$

Exemple 39. • Polynômes de Hermite : $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$
$\forall n \in \mathbb{N}$: $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$

• Polynômes de Legendre : $I = [-1,1]$, $\rho(x) = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$

Application 40. Intégration numérique

[DUP 2] **Théorème 41.** S'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\int_I \rho(x) e^{\alpha|x|}\,dx < +\infty$ alors la famille des polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour $\|\cdot\|_\rho$.

Exemple 42. • Lorsque I est borné, c'est toujours le cas.
• Les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R},\rho)$

Application 43. Base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.
$\rho : x \mapsto e^{-x^2}$. $L^2(\mathbb{R},\rho) \to L^2(\mathbb{R})$, $f \mapsto f\sqrt{\rho}$, $\frac{g}{\sqrt{\rho}} \leftarrow g$ sont des isométries bijectives inverses l'une de l'autre.

Par isométrie : $\left(P_n e^{-x^2/2}\right)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ (où $(P_n)_n$ est la famille des polynômes de Hermite).

[BOE] **III. Opérateurs compacts sur un espace de Hilbert.** ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Def 44. $u \in \mathcal{L}(H)$. u est dit compact si l'image de $\overline{B}_H$ est d'adhérence compacte dans H. On note $K(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts.

Rque: Si $\dim(H) = +\infty$, Id n'est jamais compacte.

Prop. 45. i) $K(H)$ est fermé dans $\mathcal{L}_c(H)$
ii) $u \in K(H) \iff u$ est limite d'opérateurs de rang fini

Exemple 46. •) Les opérateurs à noyau sont des opérateurs compacts
•) $H = \ell^2(\mathbb{N})$. On définit : $Tu = (a_n u_n)_{n \geq 0}$. Alors : T est compact si et seulement si $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Théorème 47. $T \in K(H)$
i) $\dim(\mathrm{Ker}(Id - T)) < \infty$ ii) $\mathrm{Im}(Id - T)$ est fermé
iii) $\mathrm{Ker}(Id - T) = \{0\} \iff \mathrm{Im}(Id - T) = E$

Rque: iii) est toujours vraie en dimension finie

Def 48. $T \in \mathcal{L}_c(H)$.
• $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda Id$ n'est pas bijectif$\}$ est le spectre de T
• $V_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda Id$ n'est pas injectif$\}$ sont les valeurs propres de T

Rque: $V_p(T) \subset \sigma(T)$ et en dimension finie $V_p(T) = \sigma(T)$.

Exemple 49. $H = \ell^2(\mathbb{N})$. $T \in \mathcal{L}_c(\ell^2)$ par : $Tu = (0, u_1, \dots, u_n, \dots)$ où $u = (u_1, u_2, \dots)$. Alors, $0 \in \sigma(T)$ mais $0 \notin V_p(T)$.

Prop. 50. $\sigma(T)$ est compact et : $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

Théorème 51. $T \in K(H)$ et $\dim H = +\infty$. Alors :
i) $0 \in \sigma(T)$ ii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = V_p(T) \setminus \{0\}$.
iii) On a l'une des situations suivantes :
*) $\sigma(T) = \{0\}$ OU *) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est fini OU
*) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Théorème 52. On suppose que H est séparable. Soit $T \in K(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors, H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T.

Conséquence 53. Tout opérateur auto-adjoint compact est de la forme : $Tu = \sum_{n\geq 0} \mu_n \langle u, e_n\rangle e_n$ où $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de H et $(\mu_n)_n$ est une suite réelle : $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exemple 54. $H = L^2([0,1])$. $K = \begin{cases} 1 & \text{si } x+y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. L'opérateur à noyau T défini par K admet pour base hilbertienne $(f_n)_n$:
$f_n(x) = \sqrt{2}\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)x\right)$