213

Espace de Hilbert. Base Hilbertiennes. Exemples et applications.

Cadre : H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

I) Espace de Hilbert et projection.

A) Premier définitions et propriétés.

Def 1 : $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire si $\langle .,. \rangle$ est une forme sesquilinéaire définie positive.

$(H, \langle .,. \rangle)$ est appelé espace préhilbertien.

ex 2 : $\mathbb{R}^d$ $\quad x,y \in H \quad \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{d} \overline{x_i}\, y_i$

$\ell^2(\mathbb{N})$ $\quad (a_n),(b_n) \in H \quad \langle (a_n),(b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{a_n}\, b_n$

$L^2(\mathbb{R})$ $\quad f,g \in H \quad \langle f,g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)\, dx.$

Prop 3 : Inégalité de Cauchy-Schwarz
$\forall x,y \in H \quad |\langle x,y \rangle| \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle.$

Cor 4 : $x \longmapsto \sqrt{\langle x,x \rangle}$ est une norme sur H.

Prop 5 : Identité du parallélogramme
$(H, \|.\|)$ est préhilbertien si et seulement si $\forall x,y \in H \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ [FIG 1]
Dans ce cas $\forall x,y \in H$.
$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$

Def 6 : i) $x,y \in H$ sont dit orthogonaux si $\langle x,y \rangle = 0$
ii) Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est dite orthonormé si $\forall i,j \in I \ \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$
iii) Soit $A \subset H$ l'orthogonal de A noté $A^\perp$ est l'ensemble $\{y \in H, \forall x \in A \ \langle x,y \rangle = 0\}$. C'est un sev fermé de H.

Prop 7 (Pythagore) Si $x,y \in H$ sont orthogonaux alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Rem 8 : La réciproque est vrai que si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
cex : $\|x+ix\|^2 = \|x\|^2 + \|ix\|^2$ or $\langle x, ix \rangle = i\|x\|^2$

Prop 9 : $A, B \subset H$ i) $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
ii) $A^\perp = \overline{A}^\perp$

Def 10 : H est un espace de Hilbert si H est préhilbertien et complet.

ex 11 : $L^2(0;1)$ est un Hilbert.
$(\mathcal{C}^0([0;1]), \langle .,. \rangle_{L^2(0;1)})$ est préhilbertien mais pas Hilbertien.

B) Projection sur un convexe fermé.

DV

Thm 12 : (projection sur un convexe fermé) Soit C un convexe fermé non vide de H Hilbert. Soit $x \in H$ il existe un unique $P_C(x) \in C$ tel que $d(x,C) = \|x - P_C(x)\|$. Il est appelé le projeté de x sur C. De plus $P_C(x)$ est caractérisé par i) $P_C(x) \in C$
ii) $\forall y \in C \quad \mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle) \leq 0$ [FIG 2]

Prop 13 : P_C est 1-Lipschitzienne [FIG 3]

Appli 14 Hahn-Banach géométrique ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) $A, B \subset H$ convexe fermé non vide, A compact $A \cap B = \emptyset$, il existe $f \in \mathcal{L}(H,\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) < \alpha < f(b)$ $\forall (a,b) \in A \times B$

Appli 15: Espérance conditionnelle : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilité. $\mathcal{F}$ une sous tribus de $\mathcal{A}$ et ν la restriction de μ à $\mathcal{F}$

On a $\mathbb{E}[X|F] = P_{L^2(X,F,\nu)}(X)$.

Prop 16: $F \subset H$ un sev fermé alors $H = F \oplus F^\perp$

Cex 17: $L^2(0;1) \neq \mathcal{C}^0(0;1) \oplus \mathcal{C}^0(0;1)^\perp$ car $\mathcal{C}^0(0;1)^\perp = \{0\}$ et $L^2(0;1) \neq \mathcal{C}^0(0;1)$.

Prop 18: Soit $A \subset F$, $\overline{Vect(A)} = A^{\perp\perp}$
Si F sev fermé on a $F = F^{\perp\perp}$

Prop 19 (caractérisation de la densité)
F un sev. F est dence $\Leftrightarrow$ $F^\perp = \{0\}$.

C) Dualité

Thm 20: (de Riesz) Soit H un Hilbert.
L'application de H dans H' définie par $y \longmapsto \Phi_y = \langle y, \cdot \rangle$ est une isometrie surjective
$\forall \Phi \in H'$ $\exists! y \in H$, $\Phi(x) = \langle y, x \rangle$ $\forall x \in H$.
et $\|\Phi\| = \|y\|$

Cor 21 (Lax-Milgram) Soit a une forme bilinéaire, continue ($|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$) coercive ($a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2$) Alors pour tout $\varphi \in H'$ il existe $u \in H$ unique tel que $a(u,v) = \varphi(v)$ $\forall v \in H$.

Appli 22: Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné $f \in L^2(\Omega)$. On peut résoudre dans $H^2(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

II) Base Hilbertien et polynomes orthogaux

A) Base Hilbertien.

Def 23: Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base Hilbertienne de H Hilbert si :
i) $\forall i,j \in I$ $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$
ii) $H = \overline{Vect(e_i, i \in I)}$

ex 24: Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on pose $e_i = (\delta_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$
La famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne.

Rem 25: ⚠ Base hilbertienne $\neq$ Base algebrique.

Prop 26 (Gram-Schmidt) Si $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ est une famille libre de H il existe $(e_i)_{i\in I}$ orthonormé tel que $\forall k \in I$ $Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = Vect(e_1, \dots e_k)$

Thm 27 i) Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.
ii) Un espace de Hilbert est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable.

Thm 28: H Hilbert separable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormé. Les propriété suivante sont équivalent
i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne
ii) $\forall x \in H \quad x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$
iii) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2$
iv) $(e_n, n\in\mathbb{N})^\perp = \{0\}$.

exc 29: Trouver la solution de
$$\min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2\,dx$$

B) Polynomes orthogonaux.

I intervalle de $\mathbb{R}$.

Def 30: $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction poids si elle est mesurable, strictement positive et tel que $\forall n\in\mathbb{N} \int_I |x|^n f(x)\,dx < +\infty$

On considère f une fonction poids et $L^2(I,f)$ avec le PS $\langle f, g\rangle = \int_I f(x)\,g(x)\,f(x)\,dx$.

Prop 31 Dans $L^2(I,f)$ il existe une unique famille de polynôme orthogonaux unitaires tel que $\deg P_n = n$. on $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la famille.

Thm 32: f une fonction poids tel qu'il existe $\alpha>0$ $\int_I e^{\alpha|x|} f(x) < +\infty$. Alors la famille des polynomes orthogonaux est une base hilbertienne de $L^2(I,f)$.

exc 33: Δ $I =]-1;1[$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ définie les polynômes de Tchebychev
Δ $I = [-1;1]$ $f(x) = 1$ définie les polynômes de Legendre

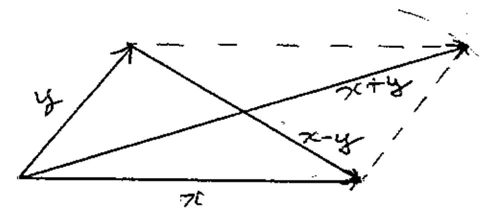
Prop 34: i) La famille des polynômes orthogonaux vérifie une relation de récurrence du type $P_{n+1} = (X - \lambda_n)P_n + \mu_n P_{n-1}$, $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \geq 1$
ii) $\forall n \geq 1$ P_n a n racines réel distincts.
iii) $\forall n \geq 1$ si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P_n et $\beta_1 \dots \beta_{n+1}$ les racine de P_{n+1} alors on a.
$\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_{n+1}$.

Appli 35: Méthode de quadrature de Gauss.
f une fonction poids sur $]\alpha;\beta[$ on regarde la méthode approché
$$\int_\alpha^\beta g(x) f(x)\,dx \simeq \sum_{j=0}^{l} \lambda_j g(x_j) \qquad x_j \in [\alpha;\beta].$$

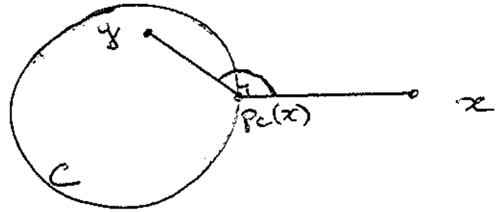
Thm: il existe un unique choix de x_j et λ_j tel que la méthode soit d'ordre $2l+1$. Les x_j sont les racines du $(l+1)$-ième polynômes orthogonal pour le poids f.

Annexe.

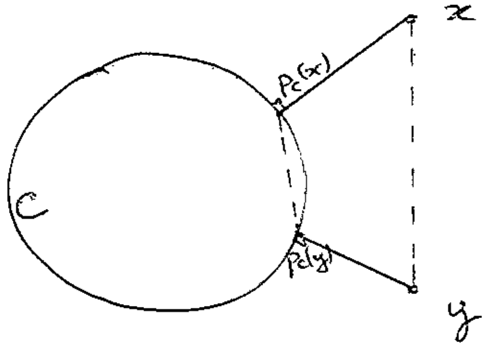
[FIG 1]



[FIG 2]



[FIG 3]



Ref :
- ▷ Analyse fonctionnelle Brezis
- ▷ Element d'analyse fonctionnelle Hirsch-Lacombe
- ▷ Objectif agrégation Beck-Malick-Peyré
- ▷ Algèbre Gourdon.
- ▷ Analyse numérique et equation différentielles Demailly.

Antoine Louazel et Zoïs Moitier

Projection sur un convexe fermé

Théorème de projection : Soit $(H, \langle\,,\rangle)$ un espace de Hilbert (où l'on note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire). Si C est une partie convexe fermée de H et si $x \in H$, il existe alors un unique élément $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C) := \inf\{\|x - z\| : z \in C\}$. Cet élément que l'on note $P_C(x)$, est appelé projection de x sur C.

Preuve : Posons $\delta := d(x, C)$. Il existe une suite $(y_n)_n$ d'éléments de C telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = \delta$. On souhaite montrer que $(y_n)_n$ converge et vu que H est complet, il suffit alors de prouver le fait que c'est une suite de Cauchy. La norme $\|\cdot\|$ étant issue du produit scalaire, elle vérifie l'identité du parallélogramme, à savoir que $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ pour tous $x, y \in H$. On a donc pour tous $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\left\|(x - y_p) + (x - y_q)\right\|^2 + \left\|(x - y_p) - (x - y_q)\right\|^2 = 2\left(\left\|x - y_p\right\|^2 + \left\|x - y_q\right\|^2\right),$$

c'est-à-dire

$$(\star) : \left\|2x - y_p - y_q\right\|^2 + \left\|y_q - y_p\right\|^2 = 2\left(\left\|x - y_p\right\|^2 + \left\|x - y_q\right\|^2\right).$$

Or, comme C est convexe, $(y_p + y_q)/2 \in C$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, donc $\left\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\right\| \geq \delta$ ou encore $\left\|2x - y_p - y_q\right\|^2 \geq 4\delta^2$. Avec $(\star)$, on en déduit

$$\left\|y_q - y_p\right\|^2 \leq 2\left(\left\|x - y_p\right\|^2 - \delta^2 + \left\|x - y_q\right\|^2 - \delta^2\right).$$

Comme $\left\|x - y_p\right\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} \delta$, on voit donc bien que la suite $(y_n)_n$ est de Cauchy ; elle converge donc vers un élément y qui appartient bien à C car ce dernier est fermé et $\|x - y\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = \delta = d(x, C)$.

Il reste à montrer l'unicité de y. Supposons qu'il existe y et z dans C tels que $\|x - y\| = \|x - z\| = \delta$ et définissons une suite $(y_n)_n$ par $y_n = y$ si n est pair et $y_n = z$ si n est impair. Cette suite vérifie $\|x - y_n\| = \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en particulier $\|x - y_n\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} \delta$ et par ce que l'on a fait plus haut, on déduit que $(y_n)_n$ converge et donc que $y = z$. Ceci prouve l'unicité et nous permet de conclure. ■

Proposition (caractérisation) : Avec les notations du théorème précédent, le point $P_C(x)$ est caractérisé par : $\forall z \in C, \langle z - P_C(x), x - P_C(x)\rangle \leq 0$.

Preuve : Dans toute cette démonstration, on écrit $x_C := P_C(x)$ afin d'alléger les notations.

Dans un premier temps, on fixe $y \in C$, on suppose que $\langle z - x_C, x - y \rangle \leq 0$ pour tout $z \in C$ et on souhaite montrer que $y = x_C$.

$$\begin{array}{rcl} \forall z \in C, \|z - x\|^2 & = & \|(z-y) - (x-y)\|^2 \\ & = & \|z-y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\langle z-y, x-y \rangle \\ & \geq & \|z-y\|^2 + \|x-y\|^2 \\ & \geq & \|x-y\|^2 \end{array}$$

et donc $\|z - x\| \geq \|x - y\|$, pour tout $z \in C$. De plus $y \in C$, donc $\|x - y\| = d(x, C)$. D'après le théorème précédent, on obtient donc $y = x_C$.

Dans un second temps, on montre que la propriété est vérifiée pour x_C. Pour tout $z \in C$, on a $\|z - x\|^2 \geq \|x - x_C\|^2$ et en développant $\|z - x\|^2 = \|(z - x_C) - (x - x_C)\|^2$, on obtient alors :

$$(\therefore) : \forall z \in C, \|z - x_C\|^2 - 2\langle z - x_C, x - x_C \rangle \geq 0.$$

On veut maintenant se débarrasser du terme $\|z - x_C\|^2$ et on pose pour cela $z := tz_0 + (1-t)x_C$ pour $z_0 \in C$ et $t \in [0 ; 1]$ (C étant convexe, $z \in C$). Appliquons maintenant $(\therefore)$ à ce z :

$$t^2\|z_0 - x_C\|^2 - 2t\langle z_0 - x_C, x - x_C \rangle \geq 0$$

et donc :

$$t\|z_0 - x_C\|^2 - 2\langle z_0 - x_C, x - x_C \rangle \geq 0.$$

En faisant tendre t vers 0, on obtient alors le fait que $\langle z_0 - x_C, x - x_C \rangle \leq 0$. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in C$, la preuve est donc faite. ■

Référence : X. Gourdon – Les maths en tête / Analyse (2e édition) (pages 407-409)

Antoine Louazel et Zoïs Moitier

Densité des polynômes orthogonaux

Théorème : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. Si on suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho \mathrm{d}\lambda)$, espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle\,,\rangle$ défini pour $f, g \in L^2(I, \rho\mathrm{d}\lambda)$ par

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve : On commence par noter que tout polynôme appartient à $L^2(I, \rho\mathrm{d}\lambda)$, donc en particulier les polynômes orthogonaux : Par définition de la fonction poids, $x \longmapsto x^n \in L^1(I, \rho\mathrm{d}\lambda)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les carrés de ces fonctions aussi. Le résultat s'en suit par linéarité.

Par définition, les polynômes orthogonaux P_n associés à ρ forment une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle\,,\rangle$. Pour prouver qu'ils forment une base hilbertienne, nous allons montrer le fait que :

$$\{x \longmapsto P_n(x) : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\},$$

ce qui démontrera le résultat (c'est l'une des caractérisations d'une base hilbertienne lorsque la famille est orthonormée). Etant donné que les X^k s'expriment sur les P_n et réciproquement, il est alors équivalent de montrer que $\{x \longmapsto x^n : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$.

Soit alors $f \in L^2(I, \rho\mathrm{d}\lambda)$ telle que $\int_I x^n f(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut prouver que $f = 0$ presque partout.

On définit pour cela la fonction φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x)\rho(x)\mathbf{1}_I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effectuant la majoration évidente suivante :

$$|f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x)$$

pour tout $x \in I$ et en remarquant que ρ et $f^2\rho$ sont intégrables sur I, on obtient donc le fait que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}\lambda)$. On peut donc considérer la transformée de Fourier de φ :

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x)e^{-i\omega x}\rho(x)\mathrm{d}x$$

pour $\omega \in \mathbb{R}$.

Posons maintenant $B_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : |\Im(z)| < \alpha/2\}$ et on va montrer que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur B_α. Soient $g(z, x) := f(x)e^{-izx}\rho(x)$ pour $x \in I$ et $z \in B_\alpha$, et

$$F(z) := \int_I g(z, x)\mathrm{d}x.$$

Montrons que F est bien définie et holomorphe sur B_α. Pour cela, on vérifie les hypothèses du théorème d'holomorphie sous le signe intégral :

- Pour tout $x \in I$, $z \longmapsto g(z,x)$ est clairement holomorphe.
- Pour tout $z \in B_\alpha$, $x \longmapsto g(z,x)$ est mesurable comme produit de fonctions mesurables
- Pour tout $z \in B_\alpha$, $|g(z,x)| \leq e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)$ et $x \longmapsto e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)$ est une fonction intégrable sur I qui est indépendante de z. En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\int_I e^{\frac{\alpha}{2}|x|}|f(x)|\rho(x)\,dx \leq \left(\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,dx\right)^{1/2} < +\infty$$

La fonction F est donc holomorphe sur B_α et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in B_\alpha$,
$$F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n g(z,x)}{\partial z^n}\rho(x)dx = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)dx.$$
En évaluant en 0, on obtient :
$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)dx = 0$$
par hypothèse sur f.

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que F est nulle sur un voisinage de 0 et par le théorème de prolongement analytique, il s'ensuit que F est nulle sur tout le connexe B_α. En particulier, F est nulle sur l'axe réel et cela signifie exactement que $\hat{\varphi} = 0$. L'injectivité de la transformée de Fourier nous permet alors de voir que $\varphi = 0$ dans $L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ et vu que $\rho(x) > 0$ pour tout x dans l'intérieur de I, on déduit alors que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in I$. ■

__Référence :__ V. Beck, J. Malick, G. Peyré – __Objectif Agrégation__ (2e édition) (pages 140-142)