213

Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et Applications.

On fixe un corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On admet les définitions de produit scalaire, d'espace préhilbertien, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

I- Espaces de Hilbert [HL]

Définition 1. Un espace préhilbertien complet pour la norme associée à son produit scalaire est appelé espace de Hilbert (ou Hilbert).

Exemples 2. Les espaces suivants sont des Hilberts :
- $\mathbb{C}^n$ avec $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$
- $\mathbb{L}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ avec $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$
- Notons $\Delta = \mathcal{D}(0,1) \subset \mathbb{C}$. On appelle espace de Bergman, noté $A^2(\Delta)$ l'ensemble $\mathbb{L}^2(\Delta)\cap H(\Delta)$. On le munit du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_\Delta \overline{f} g\, dz$.

Désormais, $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ désigne un Hilbert.

Proposition 3. Soit $x,y\in H$. Alors on a :
$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (Égalité du parallélogramme)

Remarque 3. Sur $(E,\|\cdot\|)$ un evn, $\|\cdot\|$ vérifie cette égalité ssi elle provient d'un produit scalaire.

La prop 3 permet de démontrer le...

Théorème 4. (Projection sur un convexe fermé). Soit $C\subset H$ un convexe, fermé, non vide. Alors pour tout $x\in H$, il existe un unique $y\in C$ tel que $\|x-y\| = d(x,C)$

Ce vecteur est appelé projection de x sur C, on le note $P_C(x)$. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $P_C(x)$ est caractérisé par un angle obtus : $y = P_C(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall z\in C, \langle x-y, z-y\rangle \leq 0 \\ y\in C\end{cases}$ (Annexe 1)

Proposition 5. Si C est un sev de H, fermé, on a :
- P_C est 1-lipschitzienne - $P_C \in \mathcal{L}_c(H,C)$.

Application 5. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace probabilisé et $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$ une sous-tribu. Soit F le sev fermé de $\mathbb{L}^2(X,\mathcal{A})$ des fonctions $\mathcal{F}$-mesurables. On définit l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}$ d'un élément de $\mathbb{L}^2(X,\mathcal{A})$ comme son projeté sur F. [OA]

Corollaire 6. Soit $F\subset H$ un sev. On a alors :
$$H = \overline{F}\oplus F^\perp$$
On en déduit un critère de densité commode :
$$F \text{ dense dans } H \text{ ssi } F^\perp = \{0\}.$$
On déduit du théorème 4 le fameux...

Théorème 7. (Représentation de Riesz). Soit $\phi\in\mathcal{L}_c'(H)$ alors il existe un unique vecteur $y\in H$ tel que $\forall x\in H$, $\phi(x) = \langle x,y\rangle$. De plus $\|y\| = \|\phi\|$.

Applications 7.
- Définition de l'adjoint : Soit $T\in\mathcal{L}_c(H)$, alors il existe un unique opérateur $T^*\in\mathcal{L}_c(H)$ tel que : $\forall x,y\in H$, $\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$.
- Définition intrinsèque (indépendante de la base) du gradient d'une application $f : H\to\mathbb{R}$ différentiable. [I]
- On peut retrouver le théorème de Hahn-Banach analytique : Soit $F\subset H$ un sev (fermé) et $\tilde{\phi}\in\mathcal{L}_c'(F)$.

Alors il existe une unique forme linéaire $\phi \in \mathcal{L}'_c(H)$ telle que : $\phi_{|F} = \tilde{\phi}$ et $\|\phi\| = \|\tilde{\phi}\|$. [OA]

<u>Définition 8</u>. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$. Soit $x \in H$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge faiblement</u> vers x, notée $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, lorsque $\forall y \in H, \langle x_n, y\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x, y\rangle$

<u>Proposition 9</u> : - La convergence en norme (forte) implique la convergence faible.

- $\begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ \|x_n\| \longrightarrow \|x\| \end{cases} \iff x_n \longrightarrow x$

- Si $x_n \longrightarrow x$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

<u>Contre-exemple 9</u>. $H = \ell^2(\mathbb{N})$ avec $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i$.

On a $\delta_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ mais $\|\delta_k\| = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

<u>Théorème 10</u>. (Banach-Alaoglu version Hilbert). De toute suite bornée de H on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

<u>II - Bases hilbertiennes</u> [HL]

<u>Définition 11</u>. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de H. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H lorsque (i) $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée (ii) $(e_i)_{i\in I}$ est totale : $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_i)}$

<u>Remarque 12</u>. Base hilbertienne $\neq$ Base algébrique. En effet, un evn admettant une base algébrique dénombrable n'est pas complet. [GOUA]

<u>Exemples 13</u>. - $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

- $x \mapsto e^{inx}$ base hilbertienne de $\mathbb{L}^2([0,2\pi])$.

<u>Proposition 14</u> : Si H est séparable alors il admet une base hilbertienne dénombrable.

<u>Proposition 15</u>. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée de H. Alors on a l'équivalence.

(i) $(e_i)_{i\in I}$ base hilbertienne de H $\quad x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$ } à faire que dans le cas dulp^t

(ii) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$ (Parseval)

(iii) $\forall x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle$

<u>Application 15</u>. Parseval pour les séries de Fourier donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. [GOUA] (Annexe 2)

<u>Proposition 16</u>. (Espace $A^2(\Delta)$) - $\left(\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $A^2(\Delta)$.

- $\forall z \in \Delta, \forall f \in A^2(\Delta), f(z) = \int_\Delta f(\omega) K(z,\omega)\, d\omega$ avec $K(z,\omega) = \frac{1}{\pi(1-\bar{\omega}z)^2}$ [ROOS] [CHAMB3] $\boxed{\text{DVP 1 avec } A^2(\Delta) \text{ est un Hilbert.}}$

<u>Proposition 17</u>. Soit $N \in [\![1, +\infty]\!]$ et $(f_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ une famille libre de H. Il existe $(e_n)_{n\in[\![0,N]\!]}$ une famille orthonormale de H telle que, $\forall n < N$, les familles $(e_p)_{p\in[\![0,n]\!]}$ et $(f_p)_{p\in[\![0,n]\!]}$ engendrent le même sev de H.

Appliquons ce résultat aux <u>polynômes orthogonaux</u>...

<u>Définition 18</u>. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $w : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int |x|^n w(x)\, dx < +\infty$. Alors w est appelée fonction de poids sur I.

On note $\mathcal{L}^2(I, w) = \{ f \text{ mesurable tq } \int_I |f|^2 w\, dx < +\infty \}$.

$\langle f,g\rangle_w = \int_I f\bar{g}\, w\,dx$ est un produit scalaire sur $\mathbb{L}^2(I,w)$ qui en fait un Hilbert. [OA]

Proposition 19. Il existe une unique suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires vérifiant : $-\forall n\in\mathbb{N}, \deg(p_n)=n$ et $-\langle p_n,p_m\rangle_w = 0$ si $m\neq n$. On appelle ces polynômes les polynômes orthogonaux associés au poids w [DEM]

Exemple 19. Si $I=\mathbb{R}$ et $w(x)=e^{-x^2}$ on obtient les polynômes de Hermite. $p_0=1$ $p_1=X$ $p_2=X^2-\frac{1}{2}$ ...

Proposition 20. $-\forall n\in\mathbb{N}$, p_n a n zéros distincts dans I.

$-\forall n\geq 2$, $p_n(x)=\left[x-\frac{\langle xp_{n-1},p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|_w^2}\right]p_{n-1}(x) - \frac{\|p_{n-1}\|_w^2}{\|p_{n-2}\|_w^2}p_{n-2}(x)$ [DEM]

Théorème 21. S'il existe $\alpha>0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}w(x)dx<+\infty$, alors la famille des polynômes orthogonaux RENORMÉE associée à w est une base hilbertienne de $\mathbb{L}^2(I,w)$ [OA] $\boxed{\text{DVP 2}}$

III - Applications aux EDP elliptiques [HL]

Définition 22. $-H^1(]0,1[)=\{f\in\mathbb{L}^2(]0,1[)\ /\ f'\in\mathbb{L}^2(]0,1[)\}$

Le produit scalaire $\langle f,g\rangle_{H^1} = \langle f,g\rangle_{\mathbb{L}^2}+\langle f',g'\rangle_{\mathbb{L}^2}$ fait de $H^1(]0,1[)$ un Hilbert.

$-H_0^1(]0,1[) = \mathrm{Adh}_{\|\cdot\|_{H^1}}\{\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)\}\subset H^1(]0,1[)$ est un Hilbert pour le même produit scalaire.

Proposition 23. - Tout élément $f\in H^1$ admet un représentant continu sur $]0,1[$

$-H_0^1 = H^1\cap\mathcal{C}_0(]0,1[)$

- Il existe $c>0$ tel que, $\forall u\in H_0^1$, $\|u\|_{\mathbb{L}^2}\leq \|u'\|_{\mathbb{L}^2}$.

- $\|u'\|_{\mathbb{L}^2}$ est une norme hilbertienne sur H_0^1, équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$.

Théorème 24. (Lax-Milgram) Soit $L\in L_c(H)$ et a une forme bilinéaire coercive continue sur $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Alors il existe un unique vecteur $u\in H$ tel que :

$$\forall y\in H,\ a(u,y)=L(y)$$

Application 24. Soit $f\in\mathbb{L}^2(]0,1[)$, $\alpha\in\mathbb{L}^\infty(]0,1[)$, $\beta\in\mathcal{C}^1([0,1])$. On suppose que $0<\alpha_{min}\leq\alpha$ et que $\beta'\leq 2$. Alors il existe une unique fonction $u\in H_0^1$ telle que $-(\alpha u')'+\beta u'+u=f$ $(\mathcal{D}'(0,1))$ $\left(\begin{array}{l}\text{En particulier}\\ u(0)=u(1)=0\end{array}\right)$ [BRE]

Remarque : Pour prouver ce résultat, on exhibe une formulation variationnelle du problème :

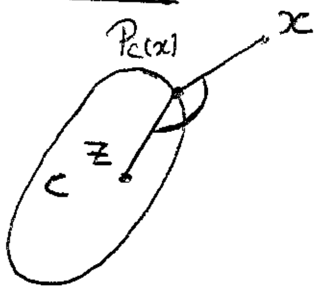
$\begin{cases}-(\alpha u')'+\beta u'+u=f\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$, on trouve : $u\in H_0^1$ solution ssi

$$\forall v\in H_0^1,\ \int_0^1 \alpha u'v'+\beta u'v+uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \text{ soit ssi}$$

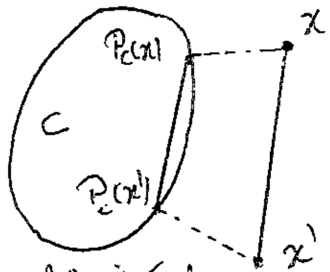
$\forall v\in H_0^1$, $a(u,v)=L(v)$, où, grâce aux hypothèses sur α et β, a et L vérifient les conditions de Lax-Milgram.

[HL] Éléments d'analyse fonctionnelle, Francis Hirsch, Gilles Lacombe
[OA] Objectif Agrégation, V. Beck, J. Malick, G. Peyré
[GOUA] Les maths en tête, Gourdon (Analyse)
[BRE] Analyse fonctionnelle, Brézis
[DEM] Demailly.

Annexe 1. [CA]



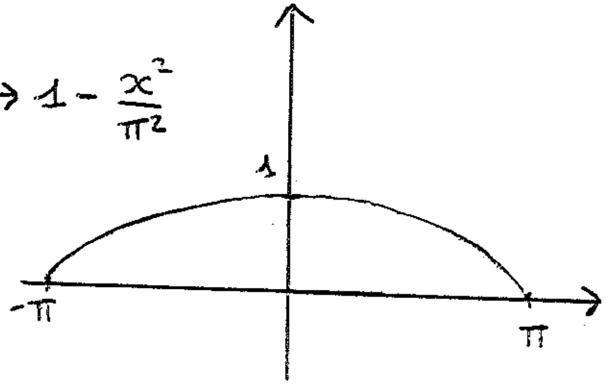
Angle obtus



1-Lipschitzité de P_C

Annexe 2.

$x \longmapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$



Développements de la leçon 213

Par Erwan Pin

Noyau de Bergman

Théorème. Soient Δ le dique unité (ouvert) de $\mathbb{C}$, et λ la mesure de lebesgue sur Δ. On pose $A^2(\Delta) = L^2(\Delta) \cap H(\Delta)$: c'est l'espace de Bergman, que l'on munit du produit scalaire $(f,g) = \int_\Delta \overline{f(z)}g(z)d\lambda(z)$. Alors :

1. $A^2(\Delta)$ est un espace de Hilbert.
2. $\left(\sqrt{n+1}z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $A^2(\Delta)$.
3. $\forall z \in \Delta$, $\forall f \in A^2(\Delta)$, $f(z) = \int_\Delta f(\omega)K(z,\omega)d\lambda(\omega)$ avec $K(z,\omega) = \frac{1}{\pi(1-\bar{z}\omega)^2}$, appelé noyau de Bergman.

Preuve. 1. Comme sous espace vectoriel de $L^2(\Delta)$, $\left(A^2(\Delta),(\cdot,\cdot)\right)$ est un espace préhilbertien. Il ne reste alors que la complétude à démontrer.

Lemme. Soient $K \subset \Delta$ un compact, $f \in A^2(\Delta)$. Alors :

$$\max_{z\in K}|f(z)| \leq \frac{1}{dist(K,\partial\Delta)\sqrt{\pi}}||f||_2$$

Preuve. Soient $a \in K$, $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Delta$, et $\rho \leq r$. Par la formule de Cauchy on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial D(a,\rho)}\frac{f(z)}{z-a}dz \underset{z=a+\rho e^{\mathrm{i}\theta}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{\mathrm{i}\theta})d\theta$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2}{r^2}\int_0^r f(a)\rho d\rho = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{\mathrm{i}\theta})\rho d\theta d\rho \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\int_{D(a,r)} f(z)d\lambda(z) \end{aligned}$$

Pour finir on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
|f(a)| &\leq \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{D(a,r)} f(z)^2 d\lambda(z)\right)^{1/2}\left(\int_{D(a,r)} 1^2 d\lambda(z)\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}}\left(\int_{D(a,r)} f(z)^2 d\lambda(z)\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{dist(a,\partial\Delta)\sqrt{\pi}}||f||_2 \leq \frac{1}{dist(K,\partial\Delta)\sqrt{\pi}}||f||_2
\end{aligned}$$

On passe l'inégalité au max, et c'est fini. □

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $A^2(\Delta)$. On a par lemme :

$$\forall K \subset \Delta \, \text{compact}, \, \forall m \geq n, \, \max_{z\in K}|f_m(z) - f_n(z)| \leq \frac{1}{dist(K,\partial\Delta)\sqrt{\pi}}||f_m - f_n||_2$$

On obtient que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $H(\Delta)$ (munit de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Δ). Par complétude de $H(\Delta)$, on a que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers $f \in H(\Delta)$. De plus $L^2(\Delta)$ est complet, et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Delta)$ vers $g \in L^2(\Delta)$. Alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers g, et par unicité de la limite on a $f = g$, ce qui conclut la preuve de 1.

2. On pose $\phi_n \, : \, z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n$. On a $\phi_n \in A^2(\Delta)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée car pour n et m entiers, on a :

$$\begin{aligned}
(\phi_m, \phi_n) &= \frac{n+1}{\pi}\int_{\Delta} \overline{z}^m z^n d\lambda(z) \\
&= \frac{n+1}{\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} r^{m+n+1}e^{i(m-n)\theta}drd\theta \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{n+1}{\pi}\frac{\pi}{n+1} = 1 & \text{si } m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

Reste à montrer que la famille est totale. Pour cela, on va montrer que $vect\{(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}\}^{\perp} = \{0\}$. Soit $f \in vect\{(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}\}^{\perp}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f, \phi_n) = 0$. De plus f est holomorphe sur Δ, donc développable en série entière, et on pose $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, $\forall z \in \Delta$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
(f, \phi_n) &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_\Delta \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k} \overline{z}^k z^n d\lambda(z) \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k} r^{n+k+1} e^{i(n-k)\theta} d\theta dr \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{R\to 1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \overline{a_k} \int_{r=0}^{R} r^{n+k+1} dr \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta \right) \\
&= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \lim_{R\to 1} \left(2\pi \overline{a_n} \frac{r^{2n+2}}{2n+2} \right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} \overline{a_n} = 0
\end{aligned}$$

Donc $f = 0$, et $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale.

3. On a que $A^2(\Delta)$ est un Hilbert, on peut donc appliquer le théorème de représentation de Riesz à la forme linéaire $f \mapsto f(z)$, ceci pour tout $z \in \Delta$ (la continuité de ces formes linéaires est une conséquence directe du lemme) :

$$\forall z \in \Delta,\ \exists! K_z \in A^2(\Delta),\ \forall f \in A^2(\Delta),\ f(z) = (K_z, f) = \int_\Delta f \overline{K_z} d\lambda$$

et on posera $K(z,\omega) = \overline{K_z(\omega)}$.
La fonction K_z étant dans $A^2(\Delta)$, et cela pour tout $z \in \Delta$, on a (dans $A^2(\Delta)$) que pour tout $z \in \Delta$:

$$\begin{aligned}
\forall \omega \in \Delta,\ K(z,\omega) &= \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{(K_z, \phi_n)} \phi_n(\omega)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (K_z, \phi_n) \overline{\phi_n(\omega)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n(z) \overline{\phi_n(\omega)}
\end{aligned}$$

De plus par le lemme, on sait que la convergence dans $A^2(\Delta)$ implique la convergence dans uniforme sur tout compact de Δ. Ainsi la série $\sum_{n\geq 0} \phi_n(z)\overline{\phi_n(\omega)}$ converge uniformément sur tout compact vers $K(z,\omega)$.

Remarque. Ce résultat est valable en fait quelque soit la base hilbertienne que l'on choisit de prendre...

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} K(z,\omega) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\overline{z}\omega)^n \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\zeta}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\zeta)^n\bigg|_{\zeta=\overline{z}\omega} \\ &= \frac{1}{(1-\overline{z}\omega)^2} \end{aligned}$$

□

Références.

- G. Roos, Analyse et Géométrie, Dunod.
- A. Chambert-Loir et S. Fermigier, Exercices d'analyse 3, Dunod.

Densité des polynômes orthogonaux

Avant de commencer :

Définition. 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une application $w : I \to \mathbb{R}$ mesurable est appelée fonction poids si elle est strictement positive et vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n w(x)dx < +\infty$.

2. On pose $L^2(I, w)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité w par rapport à la mesure de Lebesgue, avec identification des fonctions égales presque partout. On le munit du produit scalaire $(f, g) = \int_I f(x)g(x)w(x)dx$, et cela fait de lui un espace de Hilbert. De plus il contient tous les polynômes.

On admettra de plus :

Proposition. Dans $L^2(I, w)$, il existe une unique famille de polynômes unitaires $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, orthogonaux deux à deux et tels que $deg(P_n) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. C'est la famille des polynômes orthogonaux associée à w.

Et maintenant le théorème :

Théorème. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et w une fonction poids sur I. On suppose que : $\exists a > 0$, $\int_I e^{a|x|}w(x)dx < +\infty$. Alors la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes orthogonaux associés à w est une base hilbertienne de $L^2(I, w)$.

Preuve. D'après la proposition ci-dessus, on sait que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $L^2(I, w)$. Il nous suffit donc de montrer qu'elle est totale, c'est à dire que $vect\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est dense dans $L^2(I, w)$. Pour ce faire, puisque $L^2(I, w)$ est un Hilbert, il suffit de montrer que $vect\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)^\perp = \{0\}$.

Par construction de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a facilement que $vect\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = vect\left((x^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ (la fonction $x \mapsto x^n$ sera notée abusivement x^n ...). On prend $f \in vect((P_n)_{n\in\mathbb{N}})^\perp$ (qui sera fixé jusqu'à la fin de la preuve). Alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f, x^n) = 0$.
On pose $\phi = fw : I \to \mathbb{R}$. Par l'inégalité de Cauchy Schwarz on obtient :

$$\begin{aligned}\int_I |\phi(x)|dx &= \int_I |f(x)|\sqrt{w(x)}\sqrt{w(x)}dx \\ &\leq \left(\int_I |f(x)|^2 w(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_I w(x)dx\right)^{1/2} < +\infty\end{aligned}$$

Donc on a $\phi \in {}^1(I)$, ce qui signifie que sa transformée de Fourier $\hat{\phi} : \xi \mapsto \int_I f(x)e^{-i\xi x}w(x)dx$ est bien définie sur tout $\mathbb{R}$.

La prochaine étape est de démontrer que la fonction $\hat{\phi}$ admet un prolongement holomorphe F sur l'ouvert $\Omega_a = \{z \in \mathbb{C} : |Im(z)| < \frac{a}{2}\}$.

On pose pour $z \in \Omega_a$: $g(z,x) = f(x)e^{-\mathrm{i}zx}w(x)$, et $F(z) = \int_I g(z,x)dx$. La fonction F est bien définie sur Ω_a, car pour tout $z \in \Omega_a$:

$$\begin{aligned}\int_I g(z,x)dx &= \int_I |f(x)|e^{Im(z)x}w(x)dx \leq \int_I |f(x)|e^{\frac{a}{2}|x|}w(x)dx \\ &\underset{\text{C-S}}{\leq} \left(\int_I |f(x)|^2 w(x)dx\right)^{1/2} \left(\int_I e^{a|x|}w(x)dx\right)^{1/2} < +\infty\end{aligned}$$

On a envie ensuite d'appliquer le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale afin de montrer que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On s'assure avant que F vérifie les hypothèses du théorème :

- Pour tout $z \in \Omega_a$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
- Pour (presque) tout $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur Ω_a.
- $\forall z \in \Omega_a$, $|g(z,x)| \leq |f(x)|e^{\frac{a}{2}|x|}w(x)$, et la fonction en x du membre de droite est indépendante de z, ainsi qu'intégrable sur I.

Donc le théorème d'holomorphie s'applique, et alors la fonction F est holomorphe sur Ω_a. De plus on en déduit les dérivées n-ièmes de F :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \Omega_a,\ F^{(n)}(z) = (-\mathrm{i})^n \int_I x^n f(x)e^{-\mathrm{i}zx}w(x)dx$$

ce qui donne en $z = 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F^{(n)}(0) = (-\mathrm{i})^n \int_I x^n f(x)w(x)dx = (-\mathrm{i})^n (f, x^n) = 0$$

Comme F est holomorphe sur Ω_a, on a F développable en série entière sur un voisinage de 0, et comme toutes les dérivées n-ièmes de F sont nulles en 0, on obtient que F est nulle sur ce voisinage. D'après le principe de prolongement analytique, on en déduit que F est identiquement nulle sur Ω_a tout entier, et donc $\hat{\phi} = F|_{\mathbb{R}} \equiv 0$.
Pour finir, sachant que ϕ est intégrable, on en déduit par injectivité de la transformée de Fourier que $\phi \equiv 0$ sur I. Comme $w > 0$ sur I, on obtient $f \equiv 0$ sur I, et donc $vect\left((P_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)^{\perp} = \{0\}$, ce qui conclut la preuve. □

Exemples

Voici quelques exemples de familles de polynômes orthogonaux qui vérifient les hypothèses du théorème, et donc donnent des bases hilbertiennes.

1. Polynômes de Legendre : on prend $I = [-1,1]$ et $w(x) = 1$. Alors les polynômes orthogonaux P_n associés au poids w sont appelés polynômes de Legendre et forment une base hilbertienne de $L^2([-1,1], w) = L^2([-1,1])$, d'après le théorème.
2. Polynômes de Hermite : on prend $I = \mathbb{R}$ et $w(x) = e^{-x^2}$. Alors les polynômes orthogonaux P_n associés au poids w sont appelés polynômes de Hermite et forment une base hilbertienne de $L^2\left(\mathbb{R}, e^{-x^2}\right)$.
3. Polynômes de Laguerre : on prend $I = \mathbb{R}_+$ et $w(x) = e^{-x}$. Alors les polynômes orthogonaux P_n associés au poids w sont appelés polynômes de Laguerre et forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-x})$.

De plus on peut remarquer que les applications $\begin{cases} L^2(\mathbb{R}, w) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto f\sqrt{w} \end{cases}$ et $\begin{cases} L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, w) \\ g \mapsto \frac{g}{\sqrt{w}} \end{cases}$ sont des isométries bijectives, inverses l'une de l'autre. Ainsi, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, w)$, alors $(P_n\sqrt{w})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Reprenant par exemple le cas des polynômes de Hermite P_n, on obtient que $\left(P_n\, e^{-x^2/2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Références.

- V. Beck, J.Malick et G.Peyré, Objectif Agrégation, 2ème édition.