213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications

Dans tout le document $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I] Généralités

a) Définitions et premières propriétés

Def 1 : Un espace préhilbertien H est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Prop 2 : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
$\forall u, v \in H \quad |\langle u,v\rangle|^2 \leq \langle u,u\rangle . \langle v,v\rangle$.

Rq 3 : Il découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'application $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \langle u,u\rangle^{1/2}$ définit une norme sur H.

Prop 4 : (Identité du parallélogramme). La norme $\|\cdot\|$ vérifie $\forall u, v \in H \quad \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$

Def 5 : Un espace préhilbertien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé espace de Hilbert s'il est complet pour la norme $\|\cdot\|$.

Not 6 : Dans toute la suite H ou $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désignera un espace de Hilbert.

Rq 7 : Un espace préhilbertien de dimension finie est toujours un espace de Hilbert.

Ex 8 : Exemples d'espaces de Hilbert
- $\ell^2(\mathbb{N})$ où $\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n}$
- $L^2(\mathbb{R})$ où $\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g}(x)\,dx$
- Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. L'espace $H^1(I)$ avec $H^1(I) = \{u \in L^2(I) \mid \exists g \in L^2(I)\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \int_I u\varphi' = \int_I g\varphi\}$ muni du produit scalaire $\langle u,v\rangle_{H^1(I)} = \langle u,v\rangle_{L^2(I)} + \langle u', v'\rangle_{L^2(I)}$. On appelle $H^1(I)$ espace de Sobolev.

Ex 9 : $(\mathcal{C}^0([0,1]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(0,1)})$ est préhilbertien mais pas hilbertien.

Def 10 (i) $(x,y) \in H^2$ sont dit orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$
(ii) Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite orthonormée si
$$\forall i,j \in I \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{où } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$
(iii) Soit $F \subset H$. On note $F^\perp = \{y \in H, \forall x \in F \ \langle x, y\rangle = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de H que l'on appelle l'orthogonal de F.

Prop 11 : (Théorème de Pythagore). Pour tous $x, y \in H$
x, y sont orthogonaux $\Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Prop 12 : (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Soit $I = \mathbb{N}^*$ ou $I = \{1, \dots, N\}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de H. On pose $\vartheta_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ et $\forall k \in I \quad u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle e_i, \vartheta_i \rangle . \vartheta_i$ et $\vartheta_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$.
Alors la famille $(\vartheta_k)_{k \in I}$ est orthonormée et $\mathrm{Vect}(\vartheta_i : i \leq k) = \mathrm{Vect}(e_i : i \leq k) \ \forall k \in I$

b) Projection sur un convexe fermé

Prop 13 : Soit C une partie convexe non vide de H. Alors pour tout point $x \in H$, il existe un unique $y = P_C(x) \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. Le point y, appelé projection de x sur C est caractérisé par : $y \in C$ et $\forall z \in C$ $\mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0$. [HL] p91

De plus l'application $P_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne.

Coro 14 : Soit F un sous-espace vectoriel fermé non vide de H. Alors P_F est un opérateur linéaire de H sur F et $P_F(x)$ est l'unique point $y \in H$ tel que : $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$

Coro 15. (Critère de densité) Pour tout sous-espace vectoriel F de H, on a $H = \overline{F} \oplus F^\perp$. En particulier F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

[BECK] p97

Appli 16 (du thm 13) : (Hahn-Banach géométrique). Soit H un hilbert réel. Si A et B sont deux convexes non vide disjoints de H avec A fermé et B compact, alors il existe une forme linéaire $f \in H^*$ telle que
$$\sup_{a \in A} f(a) < \inf_{b \in B} f(b).$$

Appli 17 : Tout convexe fermé d'un Hilbert réel est égal à l'intersection des demi-espaces qui le contiennent.

c) Dualité dans les espaces de Hilbert et applications

Thm 18. (Riesz - Fréchet). Soit $\phi : H \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue, alors il existe un unique $y \in H$ tel que $\forall x \in H, \quad \phi(x) = \langle x, y \rangle$. De plus $\|\phi\| = \|y\|$

Coro 19 (Existence de l'adjoint). Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\forall x, y \in H$, on ait $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$. L'opérateur T^* est appelé l'adjoint de T et vérifie de plus $\|T\| = \|T^*\|$.

[HL] Exercice 1 p101
[BREZIS] p84 pour un énoncé
DVPT

Coro 20 : (Lax-Milgram) Soit $a : H^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire continue et coercive (ie $\exists \alpha > 0, \forall x \in H, a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$). Alors $\forall \varphi \in H^* \; \exists! u \in H$ tel que $a(u,v) = \varphi(v) \;\; \forall v \in H$. Si de plus a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété : $u \in H$ et $\frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right\}$

[BREZIS] p138

Appli 21 : (Solution au problème de Sturm - Liouville). Soit $f \in L^2(0,1)$ $\kappa \in L^\infty(0,1)$ et $\beta \in C^1(0,1)$ tels que $\kappa(x) \geq \kappa_{min} > 0$ pour pp $x \in [0,1]$ $|\beta(x)|^2_\infty \leq 2\kappa_{min} \;\; \forall x \in [0,1]$. Alors $\exists! u \in H^1_0(0,1)$ tel que $-(\kappa u')' + \beta u' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

II Bases hilbertiennes

a) Définitions

[RUD.] p81 et svt

Déf 22 : Soit $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ un Hilbert et E un ensemble. Une famille orthonormée $(e_i)_{i \in E}$ d'éléments de H qui vérifie $\overline{\mathrm{Vect}((e_i)_{i \in I})} = H$ est appelée base hilbertienne de H.

Thm 23 : (Inégalité de Bessel). Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormée de H, alors $\sum_{i \in E} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ où la notation $\sum_{i \in E} |\langle x, e_i \rangle|^2 := \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \left\{ \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 \right.$

Rq 24 : On déduit de l'inégalité de Bessel que pour toute famille $(e_i)_{i \in E}$ orthonormée, l'ensemble des $i \in I$ tel que $\langle x, e_i \rangle \neq 0$ est au plus dénombrable.

[RUD

Thm 25 (Théorème de Riesz - Fischer). Soit $(e_i)_{i \in E}$ une famille orthonormée de H. Soit $\varphi \in \ell^2(E)$, alors il existe $x \in H$ tel que $\varphi(i) = \langle x, e_i \rangle \quad \forall i \in E$.

p85

Thm 26 (Conditions équivalentes pour être une base hilbertienne) Soit $(e_i)_{i \in E}$ une famille orthonormée de H. EQUIV :

(a) La famille $(e_i)_{i \in E}$ est une base hilbertienne de H

(b) La famille $(e_i)_{i \in E}$ est une famille orthonormée maximale

(c) $\forall x \in H$, on a $\|x\|^2 = \sum_{i \in E} |\langle x, e_i \rangle|^2$

(d) $\forall x, y \in H$, on a $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in E} \langle x, e_i \rangle . \overline{\langle y, e_i \rangle}$

Corollaire 27 : Soit $(e_i)_{i \in E}$ une base hilbertienne de H. Alors
$$\Phi : \begin{array}{l} H \longrightarrow \ell^2(I) \\ x \longmapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in E} \end{array}$$
est une isométrie bijective.

Thm 28. Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne

Prop 29. Un hilbert est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable.

b) Exemples

Ex 30 : Soit I un ensemble. L'espace $\ell^2(I)$ est un Hilbert dont une base hilbertienne est $(e_i)_{i\in I}$ avec

$e_i : I \to \mathbb{C}$ où $e_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Si $I = \mathbb{R}$, $\ell^2(\mathbb{R})$ est un Hilbert non séparable.

Ex 31 (Série de Fourier) La famille $(t \mapsto e^{2i\pi n t})_{n\in\mathbb{Z}} = (e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$. De plus le n-ième coefficient de Fourier d'une fonction $f \in L^2(0,1)$ est $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$.

[CK] p. 111

Ex 32 (Polynômes orthogonaux). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$, dite de poids.

L'ensemble $L^2(I,\rho)$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$ est un espace de Hilbert.

Par le procédé de Gram-Schmidt, on peut orthonormaliser $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\deg(P_n) = n$. Cette famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la famille de polynômes orthogonaux associée à la fonction ρ.

DVPT

Thm 33 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, ρ une fonction de poids. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$. Alors les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Ex 34 : (i) Polynômes de Legendre : $I = [-1,1]$ et $\rho(x) = 1$

(ii) Polynômes de Hermite : $I = \mathbb{R}$ et $\rho(x) = e^{-x^2}$

III] Opérateurs et bases hilbertiennes.

Def 35 Soit H un Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur. On dit que

(i) T est autoadjoint si $T = T^*$ (où T^* est l'adjoint de T)

(ii) T est normal si $T \circ T^* = T^* \circ T$

Def 36 On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur compact si $T(B_H)$ est relativement compact dans $(H, \|\cdot\|)$.

Def 37. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On appelle valeur spectrale de T, tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda I - T$ ne soit pas inversible. L'ensemble $\sigma(T)$ des valeurs spectrales est appelé spectre de T. On appelle valeur propre de T tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda I - T$ ne soit pas injectif.

Ex 38 : • $Id : H \to H$ est un opérateur autoadjoint non compact en dimension infinie.

• Les opérateurs de rang fini sont des opérateurs compact.

• La transformée de Fourier est un opérateur normal.

Prop 39 : Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors (i) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$

(ii) $\overline{\operatorname{Im} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$

(iii) T est inversible ssi T^* l'est aussi et alors $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

[BRÉZIS] p 97 et exercice 8 [H-L] p 214

Thm 40 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal compact. Alors H admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de T. Si de plus T est autoadjoint, alors toutes ses valeurs propres sont réelles.

Prop 41 On note $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les fonctions de Hermite. La famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour la transformée de Fourier pour la valeur propre $(-i)^n$.

Références :

- RUDIN : Real and Complex Analysis
- HIRSCH - LACOMBE : Éléments d'analyse fonctionnelle.
- BREZIS : Analyse fonctionnelle

Lax-Milgram et le problème de Sturm-Liouville

Mercedes Haïech et Alexandre Eimer

19 octobre 2016

Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1 (Lax-Milgram). *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soit*

$$a : \begin{array}{ccc} H \times H & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & a(x, y) \end{array}$$

une forme bilinéaire continue *et* coercive, *c'est-à-dire :*

$$\exists C \in \mathbf{R}, \forall u, v \in H, \quad \|a(u, v)\| \leqslant C \|u\| \cdot \|v\|$$

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H, \quad a(u, u) \geqslant \alpha \cdot \|u\|^2 .$$

Soit L une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique élément v dans H tel que pour tout u dans H l'on ait :

$$a(v, u) = L(u).$$

De plus, si a est symétrique, on a la caractérisation suivante grâce à l'application suivante :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2} a(x, x) - L(x) \end{array} .$$

L'élément v est alors l'unique élément de H vérifiant l'égalité suivante,

$$\Phi(v) = \min_{u \in H} \Phi(u)$$

Étape 1 Montrons qu'il existe une application $T : H \to H$ linéaire continue telle que pour tout couple (x, y) dans H^2 l'on ait :

$$a(x, y) = \langle T(x), y \rangle .$$

On remarquera que pour tout élément x de H, l'application $y \mapsto a(x, y)$ est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur de H noté $T(x)$ tel que : $a(x, y) = \langle T(x), y \rangle$. Examinons les propriétés de $x \mapsto T(x)$:

• L'application $x \mapsto T(x)$ est linéaire.

$$\begin{aligned}\langle T(x_1+x_2), y\rangle &= a(x_1+x_2, y)\\ &= a(x_1, y) + a(x_2, y)\\ &= \langle T(x_1), y\rangle + \langle T(x_2), y\rangle .\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout élément y dans H, on en déduit :

$$T(x_1+x_2) = T(x_1) + T(x_2)$$

• L'application $x \mapsto T(x)$ est continue. En effet, l'on a grâce à la continuité de a que :

$$\|T(x)\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = a(x, T(x)) \leqslant C\,\|x\|\,\|T(x)\| .$$

Ainsi, en distinguant les cas selon que $T(x)$ soit nul ou non, l'on obtient que : $\|T(x)\| \leqslant C\,\|x\|$.

Etape 2 Nous allons montrer maintenant que l'application $T\colon H \to H$ est bijective.

• L'application $T\colon H \to H$ est injective. Pour cela, nous allons montrer une inégalité préalable. Soit $x \in H$ alors l'on a :

$$\|T(x)\|\,\|x\| \geqslant \langle T(x), x\rangle = a(x,x) \geqslant \alpha\,\|x\|^2 .$$

Ainsi, l'on en déduit l'inégalité :

$$\|T(x)\| \geqslant \alpha\,\|x\| .$$

Soit $x \in \ker T$, l'inégalité précédente nous permet d'assurer que $x = 0$.

• L'application $T\colon H \to H$ est surjective. Pour cela, nous allons montrer que l'image de T est dense et fermée.

Montrons tout d'abord qu'elle est dense : soit $y \in T(E)^{\perp}$. Alors pour tout x dans H, on a :

$$0 = \langle Tx, y\rangle = a(x,y).$$

D'où pour $x = y$:

$$0 = a(y,y) \geqslant \alpha\,\|y\|^2 .$$

Donc $y = 0$ et ainsi par le critère de densité, on en conclut que $T(H)$ est dense dans H.

De plus, l'ensemble $T(H)$ est fermé. En effet soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente de $T(H)$. Notons y sa limite et : $y_n = T(x_n)$. Comme $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy : soit alors $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n, m \geqslant N$ on ait :

$$\varepsilon > \|T(x_n) - T(x_m)\| \geqslant \alpha\,\|x_n - x_m\| .$$

La dernière égalité s'obtenant par l'inégalité montrée dans le paragraphe sur l'injectivité. Donc par complétude, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge -notons x sa limite- et par continuité de l'application T :

$$T(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Tx = y.$$

Ainsi $T(H)$ est fermé. D'où :

$$T(H) = \overline{T(H)} = H.$$

Finalement l'application T est bijective.

Conclusion Soit L une forme linéaire continue. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément $v \in H$ tel que pour tout $x \in H$ l'on ait :

$$\forall y \in H \quad L(y) = \langle y, v\rangle .$$

Posons alors $u = T^{-1}(v)$, on aura donc que

$$L(y) = \langle T(u), y\rangle = a(u, y)$$

Ce qui conclut quant à la première partie du théorème.

Caractérisation variationnelle On remarquera tout d'abord que $\Phi(x) \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ puisque :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x) \geqslant \frac{1}{2}\alpha \|x\|^2 - C\|x\| .$$

Et alors :

$$\begin{aligned}
\Phi(x) - \Phi(u) &= \frac{a(x,x)}{2} - a(u,x) + \frac{a(u,u)}{2} \\
&= \frac{a(x,x)}{2} - \frac{a(u,x)}{2} - \frac{a(u,x)}{2} + \frac{a(u,u)}{2} \\
&= \frac{a(x-u,x)}{2} + \frac{a(x,u-x)}{2} \\
&= \frac{a(x-u,x-u)}{2} \\
&\geqslant \frac{\alpha}{2}\|x-u\|^2 .
\end{aligned}$$

Ce qui nous assurera bien que $\Phi(u)$ est le minimum de Φ sur H.

Application au problème de Sturm-Liouville

Soient $I =]0,1[$, $p \in C^1(\overline{I}), q \in C(\overline{I})$ et $f \in L^2(I)$, avec $q \geqslant 0$.
On cherche à résoudre :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On suppose de plus qu'il existe α tel que :

$$p(x) \geqslant \alpha > 0 \quad \forall x \in \overline{I}.$$

Nous allons chercher les solutions faibles de ce problème. Fixons les espaces :

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I), \exists g \in L^2(I) \text{ tel que } : \int_I u\phi' = -\int_I g\phi \quad \forall \phi \in C_c^1(I)\}$$

On rappelle que $H^1(I)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle = \int_I uv + \int_I u'v'.$$

On remarquera alors :

$$H_0^1(I) = \overline{C_c^1(I)}.$$

Les solutions faibles seront les solutions de :

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

Alors remarquons que

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv$$

définit une forme bilinéaire, qui est de plus coercive, en effet :

$$a(u,u) \geqslant \alpha \|u'\|^2$$

Et puisque d'après l'inégalité de Poincaré, sur $H_0^1(I)$ les normes induites par le produit scalaire de $H^1(I)$ et par $\|u'\|^2$ sont équivalentes sur $H_0^1(I)$, la forme sera coercive. De même, elle sera continue. Ainsi on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram qui nous assurera de l'existence d'une unique solution dans $H_0^1(I)$.

Densité des polynômes orthogonaux

Mercedes Haïech et Alexandre Eimer

19 octobre 2016

Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle et soit $\rho : I \to \mathbf{R}$ une fonction. La fonction ρ est appelée *fonction (de) poids* si elle vérifie les conditions suivantes :

1. ρ est mesurable ;
2. ρ est strictement positive ;
3. $\forall n \in \mathbf{N}$: $\int_I |x|^n \rho(x)dx < \infty$.

Théorème 1. *Soit $\rho : I \to \mathbf{R}$ une fonction poids. On suppose de plus qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que*

$$\int_I \exp(\alpha|x|)\rho(x)\mathrm{dx} < \infty,$$

alors la famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale dans $L^2(I, \rho)$

Question d'espace Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier. Comme ρ est une fonction poids, on remarquera que la fonction $x \mapsto x^n$ est dans $L^1(I, \rho)$. Il en découlera immédiatement, que pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, la fonction $x \mapsto x^m$ est dans $L^2(I, \rho)$ puisque la fonction $x \mapsto x^{2m}$ est dans $L^1(I, \rho)$.

Transformée de Fourier holomorphe Soit $f \in L^2(I, \rho)$. Posons :

$$B_\alpha = \{z \in \mathbf{C} \mid |Im(z)| < \frac{\alpha}{2}\}$$

On définit la transformée de Fourier holomorphe de f comme étant la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \hat{f}: & B_\alpha & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & \xi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\mathbf{1}_I(x)\exp(-ix\xi)\rho(x)dx \end{array}$$

Il s'agira de montrer que cette fonction est bien définie et holomorphe sur B_α. Pour cela, il faudra utiliser le théorème d'holomorphie sous l'intégrale.

Notons h: $\mathbf{R} \times B_\alpha \to \mathbf{C}$ la fonction définie par

$$(x, \xi) \mapsto f(x)\mathbf{1}_I(x)\exp(-ix\xi)\rho(x)$$

À ξ fixé, la fonction $x \mapsto h(x,\xi)$ sera mesurable.
À x fixé, la fonction $\xi \mapsto h(x,\xi)$ sera holomorphe.

Vérifions la condition de *domination.*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} |f(x)\mathbf{1}_I(x)\exp(-ix\xi)\rho(x)|dx &= \int_I |f(x)|\exp(|x|\cdot Im(\xi))d\rho \\
&\leqslant \int_I |f(x)|\exp(\frac{\alpha}{2}|x|)d\rho \\
&\leqslant \left(\int_I |f(x)|^2 d\rho\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I \exp(\alpha|x|)d\rho\right)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

La dernière ligne étant obtenue grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(I,\rho)$, la majoration étant uniforme en ξ, on sera donc assuré de l'holomorphie de $\hat{f}$.

Densité des polynômes Soit $f \in \mathbf{R}[X]^{\perp}$ (l'orthogonalité est ici prise au sens de $L^2(I,\rho)$). Nous allons montrer que $f = 0$.

D'après ce qui précède, la transformée de Fourier $\hat{f}$ est holomorphe sur B_α, donc a fortiori en zéro. Ainsi $\hat{f}$ est analytique et on l'obtient que :

$$\hat{f}^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)d\rho = 0.$$

On en déduit par injectivité du développement en série entière que $\hat{f} = 0$. L'injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbf{R},dx)$ que nous assure alors que

$$f \cdot \mathbf{1}_I \cdot \rho = 0$$

et donc a fortiori que $f = 0$.

Par le critère de densité, on en déduit donc que $R[X]$ est dense dans $L^2(I,\rho)$. Par le procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt, on peut orthogonaliser la famille $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbf{N}}$, ce qui nous donne une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$

Remarque 1. *La démonstration proposée ici peut, en fait, être étendue aux espaces L^p avec $p \in [1,\infty[$, modulo les points suivants :*

— *Il faut démontrer que $x \mapsto x^n$ est dans L^p en notant que*

$$|x|^{np} < 1 + |x|^{E(np)}$$

— *Il faut bien évidemment modifier la définition de B_α*

— *Cauchy-Schwarz est remplacée par Hölder : le produit scalaire est un produit de dualité.*

— *Le critère de densité découle ici non pas d'un produit scalaire mais d'un produit de dualité.*

Et il va sans dire que sans produit scalaire les polynômes ne peuvent pas être orthogonaux, mais simplement denses.