213 ESPACES DE HILBERT. BASES HILBERTIENNES. EXEMPLES ET APPLICATIONS

I - ESPACES PRÉ-HILBERTIENS :

1) Généralités :

DEF 1 Soit E un $\mathbb{K}$ev. On appelle produit scalaire (ou hermitien) sur E, toute application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E \to \mathbb{K}$ telle que :

- $\forall y\in E$ $\begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \langle x,y\rangle \end{array}$ est bilinéaire ou sesquilinéaire.
- $\forall x,y\in E$ $\langle x,y\rangle = \begin{cases} \langle y,x\rangle & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{R} \quad \text{symétrique} \\ \overline{\langle y,x\rangle} & \text{si } \mathbb{K}=\mathbb{C} \quad \text{antisymétrique.} \end{cases}$
- $\forall x\in E$ $\langle x,x\rangle \in \mathbb{R}^+$.
- $\forall x\in E$ $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$.

DEF 2 Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire (hermitien) sur E, on dit que $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien.

EX 3 $E=\mathbb{R}^d$ $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^d a_i x_i y_i$

$E=\mathbb{C}^d$ $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^d a_i x_i \overline{y_i}$

$\left(\begin{array}{l} \forall i\in[\![1,d]\!]\ a_i\in\mathbb{R}^*_+ \\ \forall i\in[\![1,d]\!]\ x_i,y_i\in\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \end{array}\right)$.

Si $\forall i\in[\![1,d]\!]$ $a_i=1$, on parle d'espace euclidien (respec. hermitien) canonique de dimension d.

EX 4 $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ où $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

EX 5 $(\ell^2(\mathbb{N}),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ où $\langle x,y\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\overline{y_i}$ $(x=(x_n)_{n\geq 0}\,;\, y=(y_n)_{n\geq 0})$.

PROP 6 INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ.
Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. $\forall x,y\in E$

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

Egalité ssi x et y sont liés.

COR 7 $\begin{array}{l} \|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle} \end{array}$ est une norme sur E.

PROP 8 FORMULES DE POLARISATION. $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ espace préhilbertien.

$\forall x,y\in E$ $\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) = \dfrac{\|x+y\|^2-\|x-y\|^2}{4}$ $\mathrm{Im}(\langle x,y\rangle) = \dfrac{\|x-iy\|^2-\|x+iy\|^2}{4}$

THM 9 IDENTITÉ DU PARALLÉLOGRAMME.
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un evn. Alors E est un espace préhilbertien ssi sa norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité suivante : $\forall x,y\in E$

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

C-EX 10 $L^p([0,1],\mathbb{R})$ pour $p\neq 2$ est un evn mais pas préhilbertien.

2) Orthogonalité :

DEF 12 Soit $x,y\in E$ un espace préhilbertien. On dit que x est orthogonale à y si $\langle x,y\rangle=0$. On note $x\perp y$.

DEF 13 Soit $(e_1,\dots,e_n)\in E^n$. Cette famille de vecteurs est dite orthogonale si : $\forall i,j\in[\![1,n]\!]$ $i\neq j$ $\langle e_i,e_j\rangle=0$.
Elle est orthonormée si de plus : $\forall i\in[\![1,n]\!]$ $\langle e_i,e_i\rangle=1$

DEF 14 Soit $A\subset E$. On définit la partie orthogonale de A par :

$$A^\perp = \{x\in E,\ \forall y\in A\ \langle x,y\rangle=0\}.$$

PROP 15 $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

PROP 16 $A\subset (A^\perp)^\perp$ $\quad A\subset B \Rightarrow B^\perp\subset A^\perp$ $\quad A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.

THM 17 THÉORÈME DE PYTHAGORE
Soit $(e_1,\dots,e_n)\in E^n$ une famille orthonormée :

$$\forall x\in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle e_i,x\rangle|^2 + \left\|x-\sum_{i=1}^n\langle e_i,x\rangle e_i\right\|^2.$$

II - ESPACES DE HILBERT

DEF 18 $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace préhilbertien est dit espace de Hilbert s'il est complet pour la norme engendrée par $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

EX 19 $(L^2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert.

EX 20 Les espaces préhilbertiens de dim finie sont des espaces de Hilbert.

C-EX 21 $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ où $\|.\|_2 : f \mapsto \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ préhilbertien mais pas hilbertien

1) Théorème de la projection :

DVP 1

THM 22 Soit H un espace de Hilbert, C un convexe fermé de H. Alors : $\forall x \in H \ \exists ! z \in C \ \inf_{y \in C} \|x-y\| = \|x-z\|$. Ce point est appelé le projeté de x sur C. On le note $p_C(x)$.
$\forall y \in C \ \|x - p_C(x)\| \leq \|x-y\|$.
$\forall y \in C \ \mathrm{Re}(\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle) \leq 0$.

PROP 23 Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H.
$p_C : x \mapsto p_C(x)$ est 1-lipschitzienne.

PROP 24 Soit F un sev fermé de H. Alors :
- $p_F : H \to F$ est linéaire.
- $\forall x \in H \quad y = p_F(x) \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$.

PROP 25 Pour tout F sev fermé de H : $H = F \oplus F^\perp$

C-EX 26 $H = \ell^2(\mathbb{N})$; F est l'ensemble des suites de $\ell^2(\mathbb{N})$ nulles à partir d'un certain rang. $\overline{F} = H$ donc $F^\perp = \{0\}$.
F n'est pas fermé et $H \neq F \oplus F^\perp$.

CORO 27 Pour tout F sev de H : $\overline{F} \oplus F^\perp = H$

PROP 28 Pour tout F sev de H : $\overline{F} = F^{\perp\perp}$

APP 29 Pour tout F sev de H : F dense $\iff F^\perp = \{0\}$.

2) Théorème de représentation de Riesz :

THM 30 Pour toute forme linéaire continue T sur un espace de Hilbert H, il existe un unique $x \in H$ tel que : $\forall y \in H \ T(y) = \langle y, x \rangle_H$

APP 31 $\forall T \in H' \ \exists ! T^* \in H'$ tq $\forall x, y \in H \ \langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$.
T^* est l'adjoint de l'opérateur T. $\|T\| = \|T^*\|$.

DEF 32 Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de H. On dit que :
- $(x_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers $x \in H$ si $\lim_{n \to +\infty} \|x - x_n\| = 0$ (CVF)
- $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers $x \in H$ si $\forall y \in H \ \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ (CVf)

APP 33 CVF $\Rightarrow$ CVf.

C-EX 34 Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, $(e_n)_{n \geq 0}$ CVf mais pas de CVF.

PROP 35 $x_n \xrightarrow[+\infty]{} x \Rightarrow \forall T \in H' \ T(x_n) \xrightarrow[+\infty]{} T(x)$.

APP 36 THÉORÈME DE STAMPACCHIA.
Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Soit C un convexe fermé (non vide). Soit $\varphi \in H'$:
$\exists ! u \in C \quad \forall v \in C \quad a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle$.

APP 37 THÉORÈME DE LAX-MILGRAM
Soit $a(u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive.
Alors : $\forall \varphi \in H' \ \exists ! u \in C \ \forall v \in H \quad a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle$.

III - BASES HILBERTIENNES :

1) Généralités :

DEF 38 Soit $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H si elle est orthonormale et totale ($H = \overline{\mathrm{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})}$).

EX 39 La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Rem 40 Base hilbertienne $\neq$ base algébrique.

THM 41 Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

THM 42 INÉGALITÉ DE BESSEL
Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormale de H : $\forall x \in E$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

THM 43 THÉORÈME DE BESSEL-PARSEVAL
Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormale de H. On a équivalence entre
i) $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.
ii) $\forall x \in H \quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.
iii) $\forall x, y \in H \quad \langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$.

PROP 44 Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H.
$$\forall x \in H \qquad x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle e_n$$

2) Polynômes orthogonaux :

DEF 45 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction poids : $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty.$$

DEF 46 On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable muni du produit scalaire suivant :
$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x)\, dx$$

REM 47 $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert.

PROP 48 Il existe une unique famille $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux vérifiants $\deg(P_n) = n \ \forall n \in \mathbb{N}$

THM 50 S'il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x)\, dx < +\infty$, alors $(P_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

C-EX 51 $I =]0, +\infty[\quad \rho(x) = x^{-\ln(x)}$ pas de décroissance exponentielle.

EX 52 Polynômes de Hermite ($I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$).
Legendre ($I = [-1, 1]$, $\rho(x) = 1$)

DVP2

3) Série de Fourier :

On travaille sur $L^2(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :
$$\|f\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$
On considère : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e_n(x) = e^{inx}$.

DEF 53 Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$, on définit les coefficients de Fourier par :
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{e_n(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

PROP 54 $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire associé à la norme ci-dessus est un espace de Hilbert.

COR 55 On peut considérer les coefficients de Fourier comme un produit scalaire : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$.

PROP 56 (admis) $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

COR 57 $\forall f \in L^2(\mathbb{T}) \quad f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$.

REM 58 ÉGALITÉ DE PARSEVAL
$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \quad \text{pour } f \in L^2(\mathbb{T}).$$

APP 59 Calcul des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

NP 1

THÉORÈME DE LA PROJECTION

Soit H un espace de Hilbert. Soit C un convexe fermé de H. Alors:

$$\forall x \in H \quad \exists !\, z \in C \qquad \inf_{y \in C} \|x-y\| = \|x-z\|$$

Ce point est appelé le projeté de x sur C. On le note $p_C(x)$.

Existence:

Soit $x \in H$ fixé. Soit $(z_n)_{n\geqslant 0} \in C^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x - z_n\| = \inf\limits_{y\in H} \|x-y\|$.

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|z_n - x + x - z_m\|^2 = \|z_n - x\|^2 + \|x - z_m\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle z_n - x, x - z_m\rangle).$$

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|z_n - x\|^2 + \|x - z_m\|^2 + 2\left(\frac{\|z_n - z_m\|^2 - \|z_n + z_m - 2x\|^2}{4}\right)$$

formule de polarisation

$$\|z_n - z_m\|^2 - \frac{\|z_n - z_m\|^2}{2} = \|z_n - x\|^2 + \|x - z_m\|^2 - \frac{1}{2}\|z_n + z_m - 2x\|^2$$

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2\|z_n - x\|^2 + 2\|x - z_m\|^2 - \|z_n + z_m - 2x\|^2.$$

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2\|z_n - x\|^2 + 2\|x - z_m\|^2 - 4\left\|\frac{z_n + z_m}{2} - x\right\|^2.$$

Or $\frac{z_n - z_m}{2} \in C$ donc $\left\|\frac{z_n + z_m}{2} - x\right\| \geqslant \inf\limits_{y\in C}\|x-y\|$.

D'où

$$\|z_n - z_m\|^2 \leqslant \underbrace{2\|z_n - x\|^2}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\left(\inf_{y\in C}\|x-y\|\right)^2} + \underbrace{2\|x - z_m\|^2}_{\xrightarrow[m\to+\infty]{} 2\left(\inf_{y\in C}\|x-y\|\right)^2} - 4\left(\inf_{y\in C}\|x-y\|\right)^2 \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, on a: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n,m \geqslant N_\varepsilon \quad \|z_n - z_m\| < \varepsilon$

Donc $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans un espace de Hilbert.

Ainsi, il existe $z \in H$ tel que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} z$ et on a: $\|x - z\| = \inf\limits_{y\in C}\|x-y\|$.

Donc

$$\boxed{\forall x \in H \quad \exists z \in C \qquad \inf_{y\in C}\|x-y\| = \|x-z\|}$$

JVP 2

BASE HILBERTIENNE

> S'il existe $a>0$ tel que $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$, alors $(P_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

La famille $(P_n)_{n\geq 0}$ est orthonormale car elle a été construite pour que les polynômes soient orthogonaux deux à deux. Ainsi, on a :

$$(P_n)_{n\geq 0} \text{ base hilbertienne} \iff \overline{\mathrm{Vect}(P_n \mid n\in\mathbb{N})} = L^2(I,\rho).$$
$$\iff \overline{\mathrm{Vect}(x^n \mid n\in\mathbb{N})} = L^2(I,\rho)$$
$$\iff \mathrm{Vect}(x^n \mid n\in\mathbb{N})^{\perp} = \{0\}.$$

Supposons que : $\exists a>0$ tq $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$.

Soit $f\in L^2(I,\rho)$ telle que $f\in \mathrm{Vect}(x^n)^{\perp}$. Posons : $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\,\rho(x) & \text{si } x\in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Montrons que $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$:</u>

On sait que : $\forall t\geq 0 \quad t \leq \frac{t^2+1}{2}$.

Donc : $\forall x\in I \quad |f(x)|\,\rho(x) \leq \frac{1}{2}\left(1+|f(x)|^2\right)\rho(x)$.

ρ et ρf^2 sont intégrables sur I.

Donc $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$.

On considère sa transformée de Fourier. Pour $\omega\in\mathbb{R}$:

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x)\,e^{-i\omega x}\rho(x)\,dx$$

<u>Montrons que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur $B_a=\{z\in\mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)|$</u>

Posons $g(z,x) = e^{-izx}f(x)\,\rho(x)$.

Pour $z\in B_a$: $\int_I |g(z,x)|\,dx = \int_I |e^{-izx}f(x)|\,\rho(x)\,dx$

$$\leq \int_I e^{\frac{a}{2}|x|}\,|f(x)|\,\rho(x)\,dx. \quad z\in B_a$$

$z \in B_a$ $\quad \displaystyle\int_I |g(z,x)|\, dx \leqslant \underbrace{\left(\int_I e^{a|x|} \rho(x)\, dx\right)^{1/2}}_{\substack{<+\infty \\ \text{par hypothèse}}} \underbrace{\left(\int_I |f(x)|^2 \rho(x)\, dx\right)^{1/2}}_{\substack{<+\infty \\ \text{car } f \in L^2(I,\rho)}} < +\infty$

Donc la fonction suivante est bien définie : $\forall z \in B_a \quad F(z) = \int_I e^{-izx} f(x) \rho(x)\, dx$

Montrons que F est holomorphe :

- $\rightarrow$ $\forall z \in B_a$, $x \longmapsto g(z,x)$ mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}$
- $\rightarrow$ $\forall x \in I$, $z \longmapsto g(z,x)$ holomorphe sur B_a.
- $\rightarrow$ $\forall z \in B_a$, $\forall x \in I$, $|g(z,x)| \leqslant \underbrace{e^{\frac{a}{2}|x|} |f(x)| \rho(x)}_{h(x)} = \underbrace{\left(e^{\frac{a}{2}|x|} \rho(x)^{1/2}\right)}_{\in L^2} \underbrace{\left(|f(x)| \rho(x)^{1/2}\right)}_{\in L^2.}$

$h \in L^2(I,\rho)$ intégrable et indépendante de z.

Donc F est holomorphe sur B_a.

<u>Montrons que f est nulle sur I :</u>

D'après le théorème d'holomorphie : $\forall z \in B_a \quad F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x) \rho(x)\, dx$

D'où : $F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x) \rho(x)\, dx = (-i)^n \langle f, x^n \rangle$.

Or puisque $f \in \mathrm{Vect}(x^n | n \in \mathbb{N})^{\perp}$, $F^{(n)}(0) = 0$.

Par unicité du développement en série entière de F, on en déduit que $F=0$ sur un voisinage de 0. De plus, B_a étant connexe, on a $F=0$ sur B_a.

Donc $F=0$ en particulier sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\hat{\varphi} = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Par injectivité de la transformée de Fourier : $\varphi = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Comme : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\rho(x) > 0$. On a : $\forall x \in I$ $f(x) = 0$.

<u>Conclure :</u>

On en déduit alors que : $\mathrm{Vect}(x^n | n \in \mathbb{N})^{\perp} = \{0\}$.

<u>Donc $(P_n)_{n \geqslant 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.</u>

Contre-exemple: $I =]0,+\infty[\quad \rho(x) = x^{-\ln(x)}$

$$\boxed{\text{Les polynômes orthogonaux associés à cette fonction poid ne forment pas une base hilbertienne de } L^2(I,\rho).}$$

Soit f la fonction suivante : $\forall x \in I \quad f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$.

Montrons que f est orthogonale à tous les monômes x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \langle f, x^n \rangle = \int_I x^n \sin(2\pi \ln(x))\, x^{-\ln(x)}\, dx$$

chgm^T var: $y = \ln(x)$.

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y)\, e^{-y^2}\, dx$$

$$= e^{-\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{\left(y+\frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi y)\, dx$$

chgm^T var: $t = y + \frac{n+1}{2}$.

$$= (-1)^n e^{-\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi t)\, e^{-t^2}\, dx$$

fonction impaire.

$$= 0$$

Conclure:

Ainsi, on a montrer que la famille $(x^n)_{n \geq 0}$ n'est pas totale dans H.

Donc la famille des polynômes associés à ρ non plus.

On a ainsi montré que $(P_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$

Remarque:

Ce contre exemple est assez artificiel.

En pratique la condition de décroissance exponentielle est souvent vérifiée.

$\rho \in L^2(I,\rho)$? $\quad \int_0^{+\infty} \sin^2(2\pi \ln(x))\, x^{-\ln(x)}\, dx$