213

Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et soit H un espace de Hilbert.

I - Espaces préhilbertiens et orthogonalité

A - Espaces préhilbertiens et espaces de Hilbert

Déf ① : On appelle produit scalaire sur E toute forme sesquilinéaire, hermitienne, définie positive.

Prop ② : $\forall\, x, y \in E$, $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$

Déf ③ : On appelle espace préhilbertien tout couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Ex ④ : $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où $\langle z, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

$(\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Prop ⑤ : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) :
$\forall\, x,y \in E$, $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ avec égalité ssi $\{x,y\}$ est une famille liée.

Coro ⑥ : La quantité $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ définit une norme sur E.

Prop ⑦ : $\forall x,y \in E$, on a l'identité du parallélogramme :
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Prop ⑧ : $\forall\, x,y \in E$, on a :
$\mathrm{Re}(x,y) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$
$\mathrm{Im}(x,y) = \frac{1}{2}(\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

Déf ⑨ : Un espace de Hilbert H est un espace préhilbertien complet pour $\|\cdot\|$.

Ex ⑩ : $(L^2(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

C-Ex ⑪ : $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$

Rq ⑫ : Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

B - Orthogonalité

Déf ⑬ : Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$

Déf ⑭ : Soient $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$. On dit que la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est :
- orthogonale si $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ $\forall i \neq j$
- orthonormale si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.

Ex ⑮ : $\{f(t) = e^{int}\}_n$ est orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$.

Théo ⑯ : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ orthogonale dans E. Alors
$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$.

Prop ⑰ : Soit $(f_1,\dots,f_n)$ une famille libre de E. Il existe alors une famille orthonormale de E $(e_1,\dots,e_n)$ telle que $\forall N \in \{0,\dots,n\}$, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_N) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_N)$

Ex ⑱ : $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \longrightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

Déf ⑲ : Soit $A \subset E$. On définit l'orthogonal de A comme :
$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, \langle x,y\rangle = 0\}$.

Prop ⑳ : $A^\perp$ est un sev fermé de E.

Prop ㉑ : Soit $A \subset E$. On a : $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$; $A^\perp = \overline{A}^\perp$.

II - Théorèmes d'existence et conséquences

A - Théorème de la projection

Théo ㉒ : Soit H un Hilbert et $\mathcal{C}$ une partie convexe fermée de H. Alors : $\forall\, x \in E$, $\exists!\, y \in C$ tel que :
$\|x-y\| = d(x,C) = \inf_{z\in\mathcal{C}} \|x-z\|$.
Ce point, appelé projection de x sur $\mathcal{C}$ est caractérisé par : $y \in C$ et $\forall z \in C$, $\mathrm{Re}(x-y, z-y) \leq 0$.

Rq ㉓ : Lorsque $\mathcal{C}$ est un sev de dimension finie, on a la formule $y = P_C(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. (e_i) : base de $\mathcal{C}$.

Appli ㉔ : Minimisation de $\int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2\,dx$

Appli ㉕ : Soit $F \subset H$ sev. Alors, $H = \overline{F} \oplus \overline{F}^\perp = \overline{F} + F^\perp$.

Coro ㉖ : F sev. $F^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overline{F} = H$.

Appli ㉗ : $F \subset H$ sev. Alors, $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

Contre-ex ㉘ : $H = (\ell^2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où $\langle x,y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$
$F = \{(x_n)_n \in H, \exists N, \forall n \geq N, x_n = 0\}$. On a $\overline{F} = H$ et donc $F^\perp = \{0\}$ mais $H \neq F \oplus F^\perp$. (F non fermé)

B - Théorème de représentation de Riesz.

Théo 29 : L'application $E \to E'$, $y \mapsto (x \mapsto \langle x,y\rangle)$ est une application linéaire, isométrique et surjective, si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et antilinéaire si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Appli 30 : Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(H)$, il existe un unique $v \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que : $\forall x,y \in H$, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(x)\rangle$.
L'endomorphisme v est appelé adjoint de u et noté u^*.
De plus, $(u^*)^* = u$ et $\|u\| = \|u^*\|$.

Rq 31 : En dimension finie, après le choix d'une base $\mathcal{B}$, on a : $\mathrm{Mat}(u^*, \mathcal{B}) = {}^t\overline{\mathrm{Mat}(u,\mathcal{B})}$.

Prop° 32 : Soit $u \in \mathcal{L}_c(H)$. On a : $H = \mathrm{Ker}(u^*) \oplus \overline{\mathrm{Im}(u)}$

Déf° 33 : Soit $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$. On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers x si : $\forall y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle x,y\rangle$
De même, on dit que $(x_n)_n$ converge fortement vers $x \in H$ si $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Prop° 34 : On a : convergence forte $\Rightarrow$ convergence faible.

Rq 35 : Réciproque fausse : Dans $\ell^2(\mathbb{N})$ $(x_n)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$(x_n)_j$ converge faiblement vers 0 mais $\|x_n\| = 1$.

Prop° 36 : Soit H un espace de Hilbert séparable
Soit $U \subset H$ partie fermée convexe non bornée.
Soit $J : U \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle dérivable, convexe, coercive. Alors, $\exists \alpha \in H$ tel que $J(\alpha) = \inf\limits_{x\in H} J(x)$

Dev 1

III - Bases hilbertiennes

A - Définitions et propriétés

Déf° 37 : Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H si : elle est : i) orthogonale
ii) normée
iii) Totale (ie $H = \overline{\mathrm{Vect}(\{e_i\})}$)

Rq 38 : Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt permet des bases hilbertiennes.

Théo 39 : Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne. (ADMIS)
Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.

Ex 40 : Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, $e_j(i) = \delta_{ij}$. $(e_j)_j$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Théo 41 : Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_n$ une famille orthonormée de H. Alors les ASSE :
1) $(e_n)_n$ base hilbertienne de H
2) $\forall x \in H$: $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$
3) $\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ (Parseval)
4) $\forall x,y \in H$, $\langle x,y\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$

Coro 42 : On a alors une isométrie linéaire surjective :
$$\begin{aligned} H &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto (\langle x, e_n\rangle)_n \end{aligned}$$

B Séries de Fourier

Déf° 43 : On définit $L^2(\mathbb{T})$ comme l'ensemble des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable sur $[0,2\pi]$

Déf° 44 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout , on considère les coefficients de Fourier définis par :
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

Rq 45 : On a $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$ où $e_n(x) = e^{inx}$

Prop° 46 : La famille $(e_n)_n$ est orthonormale.

Déf° 47 : Soit $N \in \mathbb{N}$. On définit
$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n \quad \text{et} \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$$

Théo 48 (Fejér) : Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p \in [1, +\infty[$, alors :

$$\sigma_n(f) \xrightarrow[\|\cdot\|_{L^p}]{} f$$

Appli 49 : $(e_n)_n$ est totale. Il s'agit donc d'une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Cor 50 : Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. On a alors

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$$

Théo 51 : L'application $\begin{array}{l} L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{N}) \\ f \longmapsto (c_n(f))_{n \geq 0} \end{array}$ est une isométrie linéaire surjective.

Exemple 52 : $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

C - Polynômes orthogonaux

Def 53 : On appelle fonction poids toute application $\rho : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$.

Ex 54 : $\rho(x) = e^{-a|x|^2}$ où $a > 0$.

Def 55 : On note $(L^2(I, \rho), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à ρ, une fonction poids.

Prop / Def 56 : Il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_n$ orthogonale selon ρ telle que $\forall n$, $\deg(P_n) = n$. On l'appelle famille des polynômes orthogonaux associée à ρ.

Prop 57 : La famille $(P_n)_n$ des polynômes orthogonaux est dense dans $L^2(I, \rho)$ $\boxed{\text{DEV 2}}$

Ex 58 : Polynôme de Legendre : $\rho(x) = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)$$

Ex 59 : Polynômes de Hermite : $\rho(x) = e^{-x^2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

Ref : × Objectif agrégation
× Hirsch / Lacombe
× Ciarlet