213 — Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

On considèrera, sauf mention contraire, $(H, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Définitions et généralités.

1) Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert.

__Définition 1__ : On appelle produit scalaire sur H toute forme bilinéaire symétrique (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) | sesquilinéaire hermitienne (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) définie positive.

Si $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est un produit scalaire, alors $(H, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ est appelé espace préhilbertien. Un espace préhilbertien complet est un espace de Hilbert.

__Exemples 2__ : $(\mathbb{K}^d, \langle \cdot,\cdot\rangle)$ avec $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \overline{y_i}$

$(\mathcal{C}^0([0,1]), \langle \cdot,\cdot\rangle)$ avec $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f\overline{g}$

__Proposition 3__ (Cauchy-Schwarz) : $\forall (x,y) \in H^2$, $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

__Corollaire 4__ : $\|\cdot\| : x \mapsto (\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur H.

__Proposition 5__ : $\forall (x,y) \in H^2$, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$
(identité du parallélogramme) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

__Remarque 6__ : Si une norme vérifie l'identité du parallélogramme, alors elle est issue d'un produit scalaire.

__Proposition 7__ : $H \to H'$, $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle$ est une isométrie linéaire (si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) | antilinéaire (si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) et continue.

__Définition 8__ : Soient $(x,y) \in H^2$, on dit que x, y sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle = 0$. Si $\mathcal{A} \subset H$, on note $\mathcal{A}^\perp = \{x \in H, \forall y \in \mathcal{A}, \langle x,y\rangle = 0\}$ appelé l'orthogonal de $\mathcal{A}$.

__Proposition 9__ : Si $\mathcal{A} \subset H$, $\mathcal{A}^\perp = \langle \mathcal{A}\rangle^\perp = \overline{\langle \mathcal{A}\rangle}^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset H$, alors $\mathcal{B}^\perp \subset \mathcal{A}^\perp$.

Si F est un sous-espace vectoriel de H, on a $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$ mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

__Exemples 10__ : Dans $\mathbb{R}^3$, $\{x+y+z=0\}^\perp = \langle (1,1,1)\rangle$

Dans $\mathbb{R}[X]$, $(X\mathbb{R}[X])^\perp = \{0\}$ avec $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

Dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \langle \cdot,\cdot\rangle)$ avec $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, grâce au théorème de Weierstraß, on a :
$(x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}$.

2) Familles orthonormales, bases hilbertiennes.

__Définition 11__ : Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de H est dite :

- orthogonale si $\forall i \neq j \in I$, $\langle x_i, x_j\rangle = 0$
- orthonormale si $\forall (i,j) \in I^2$, $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$.

__Proposition 12__ : Toute famille orthogonale est libre.

__Théorème 13__ (Gram-Schmidt) : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille libre de H. Alors il existe une unique famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

- $\langle e_1, \dots, e_n\rangle = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$
- $\langle e_n, x_n\rangle \geq 0$.

__Définition 14__ : Une famille orthonormale totale de vecteurs est appelée une base hilbertienne de H.

__Théorème 15__ (Bessel-Parseval) : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de H. Alors :

- $\forall x \in H$, $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$
- si de plus $x \in \overline{\langle e_i, i \in I\rangle}$, alors on a en fait égalité.

__Remarque 16__ : On a en particulier égalité $\forall x \in H$ si $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H.

__Théorème 17__ : Tout espace préhilbertien séparable admet une base de Hilbert dénombrable.

__Théorème 18__ : Si $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base de Hilbert, alors $\forall x \in H$, la série $\sum_{n\geq 1} \langle x, e_n\rangle e_n$ converge vers x.

__Théorème 19__ : Soit H un espace préhilbertien séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Alors

$H \to \ell^2(\mathbb{N})$ est une isométrie linéaire. Si de plus
$x \mapsto (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$
H est complet, alors cette application est surjective.

II) Théorème de projection sur un convexe fermé et conséquences.

On considère dans toute cette partie un espace de Hilbert H.

1) Le théorème de projection.

DEV ①

<u>Théorème 21</u> (théorème de projection) : Soit C un convexe fermé non vide de H. Alors $\forall x \in H, \exists! y = p_C(x)$ tel que $d(x,C) = \|x-y\|$. De plus, y est caractérisé par :

$$\begin{cases} y \in C \\ \mathrm{Re}(\langle x-y, z-y\rangle) \leq 0 \ \forall z \in C. \end{cases}$$

<u>Corollaire 22</u> : $x \mapsto p_C(x)$ définit une application 1-lipschitzienne.

<u>Corollaire 23</u> : Dans le cas où $C = F$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $y = p_F(x)$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp. \end{cases}$$

<u>Corollaire 24</u> : Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $H = F \oplus F^\perp$, et p_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

<u>Corollaire 25</u> : Pour tout sous-espace vectoriel F de H, on a $F^{\perp\perp} = \overline{F}$.

<u>Corollaire 26</u> : F sous-espace vectoriel de H est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$.

<u>Contre-exemple 27</u> : Soit $c_{0,0}$ l'ensemble des suites réelles à support fini muni du produit scalaire ℓ^2. Soit F le sous-espace vectoriel de $c_{0,0}$ des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum_{n\geq 0} \frac{x_n}{2^n} = 0$. Alors F est fermé mais $\overline{F} \subsetneq F^{\perp\perp}$.

2) Le théorème de représentation de Riesz.

<u>Théorème 28</u> (de Riesz) : $\forall \varphi \in H', \exists! y \in H, \varphi = \langle \cdot, y\rangle$.

<u>Remarque 29</u> : Ainsi, dans le cas complexe, l'isométrie $y \mapsto \langle \cdot, y\rangle$ est surjective. Ainsi, dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a une identification naturelle $H \simeq H'$.

<u>Corollaire 30</u> : $\forall T \in \mathcal{L}(H), \exists! T^* \in \mathcal{L}(H), \ (Tx, y) = (x, T^*y)$ $\forall (x,y) \in H^2$. L'opérateur T^* est appelé l'adjoint de T.

<u>Théorème 31</u> (Hahn-Banach dans un Hilbert) : Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H, et soit $g \in F'$. Alors il existe un unique prolongement $f \in H'$ de g tel que $\|f\|_{H'} = \|g\|_{F'}$.

<u>Contre-exemple 32</u> : On n'a, en dehors du cas hilbert, généralement pas unicité du prolongement : par exemple $f(x,0) = x$ se prolonge en $f_1 : (x,y) \mapsto x+y$ ou en $f_2 : (x,y) \mapsto x-y$, sur $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

<u>Définition 33</u> : Une forme bilinéaire a sur H est dite coercive s'il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\forall x \in H, a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$.

<u>Théorème 34</u> (Stampacchia) : Soit a une forme bilinéaire continue coercive sur H et soit C un convexe de H, fermé non vide. Alors $\forall \varphi \in H', \exists! u \in C, a(u, v-u) \geq \varphi(v-u)$ $\forall v \in H$.

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par $u \in C$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v\in C}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\right\}$.

Corollaire 35 (Lax-Milgram) : Soit a une forme bilinéaire continue coercive, alors $\forall \varphi \in H'$, $\exists ! u \in H$ tel que $\varphi = a(u,\cdot)$, et si de plus a est symétrique, alors u est caractérisé par $u \in H$ et $\frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \{\frac{1}{2}a(v,v) - \varphi(v)\}$.

Application 36 : Le problème $\begin{cases} -(pu')' + qu = f \text{ sur }]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$

où $p \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $q \in \mathcal{C}^0([0,1])$ et $f \in L^2(0,1)$,

$p \geq \alpha > 0$ et $q \geq 0$, admet une unique solution faible.

Si de plus $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors cette solution est en fait une solution forte.

III) Application aux espaces L^2.

1) Séries de Fourier sur $L^2([0,2\pi])$.

Théorème 37 (Riesz-Fischer) : $\forall 1 \leq p \leq +\infty$, L^p est complet pour sa norme usuelle.

Corollaire 38 : L^2 est un espace de Hilbert.

Définition 39 : Pour $f \in L^2([0,2\pi])$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de f par : $c_n(f) := \langle f, e_n \rangle$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, avec $e_n : t \mapsto e^{int}$.

Remarque 40 : La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale dans $L^2([0,2\pi])$.

Théorème 41 (Fejér) : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,2\pi])$ avec $f(0) = f(2\pi)$.

On pose $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) e_k$ et $\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f)$,

alors $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f sur $[0,2\pi]$.

Corollaire 42 : $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,2\pi])$.

2) Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ et $BL^2(\mathbb{R})$.

Théorème 43 (Plancherel) : $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$, $f \mapsto \hat{f}$

se prolonge à L^2 en entier de telle manière que :

- $\forall f \in L^2$, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$
- $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme de $L^2 \to L^2$
- $\int_{-A}^{A} f(x) e^{-ixt} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow[A \to +\infty]{L^2} \hat{f}$ au sens L^2.

Définition 44 : On pose $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}) = \{u \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}), |u(x)| \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0\}$.

Lemme 45 : Si $u \in L^1$ alors $\hat{u} \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$ et $\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_1$.

Définition 46 : On pose $BL^2 := \{u \in L^2(\mathbb{R}), \operatorname{supp}(\hat{u}) \subseteq I\}$ où $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Proposition 47 : $BL^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire L^2 est un espace de Hilbert.

Théorème 48 (de Shannon) :

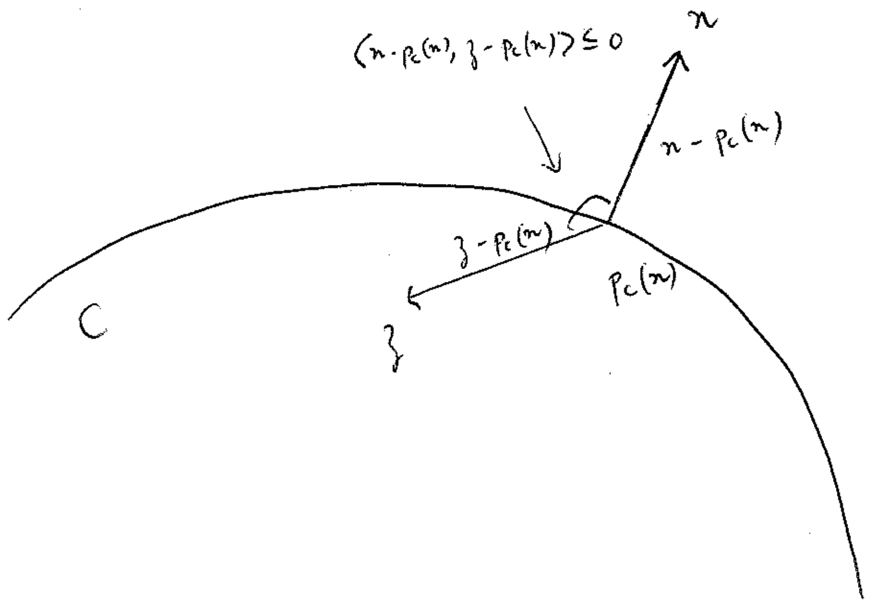
(i) $\forall u \in BL^2(\mathbb{R})$, u admet un représentant dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$

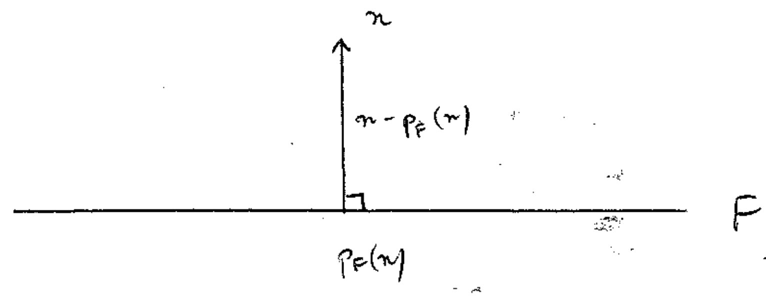
(ii) $(\operatorname{sinc}(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $BL^2(\mathbb{R})$.

(iii) $\forall u \in BL^2(\mathbb{R})$, $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) \operatorname{sinc}(x-k)$, et la série converge uniformément et dans $L^2(\mathbb{R})$.

Corollaire 49 : $\forall u \in BL^2(\mathbb{R})$, $\|u\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u(k)|^2$.

DEV ②





Théorème de projection sur un convexe fermé … … et sur un sous-espace vectoriel fermé.