E. Odin
P. Maurer
Rennes 1

Leçon n°213. Espaces de Hilberts. Exemples et applications.

On considère deux espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1 Généralités

1.1 Propriétés élémentaires des espaces de Hilbert

Définition 1.

Une application f de $E\times E$ dans $\mathbb{K}$ est appelée un produit scalaire si et seulement si elle est sesquilinéaire hermitienne définie positive, c'est-à-dire si elle vérifie

$$\begin{array}{rcl} \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(x,y,z)\in E^3\quad f(\lambda x+y,z) & = & \lambda f(x,y)+f(y,z)\\ \forall(x,y)\in E^2\quad f(y,x) & = & \overline{f(x,y)}\\ \forall x\in E\quad f(x,x) & \geq & 0\\ f(x,x)=0 & \Longleftrightarrow & x=0 \end{array}$$

On appelle espace pré-hilbertien un couple $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire. On munit alors $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|x\|:=\langle x,x\rangle^{1/2}$

Exemple 2.

Si $E=\mathbb{C}^n$, le produit scalaire hermitien canonique est donné par $\langle x,y\rangle:=\sum_{i=1}^n x_i\,\overline{y_i}$.

Si $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré et $E=L^2_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu)$, la relation

$$\forall(f,g)\in E^2\quad \langle f,g\rangle:=\int_X f(x)\,\overline{g(x)}\,d\mu(x)$$

définit un produit scalaire sur E.

Dans la suite, E désigne l'espace $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle,\|\cdot\|)$.

Proposition 3. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tout $(x,y)\in E^2$, on a

$$|\langle x,y\rangle|^2\leq\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle.$$

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz *si et seulement si les vecteurs x et y sont liés.*

Proposition 4. *(Egalité de la médiane)*

On a, pour tout $(x,y)\in E^2$:

$$\|x\|^2+\|y\|^2=2\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+2\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2.$$

Proposition 5. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E telles que*

$$\lim_{n\to+\infty}\|x_n-x\|=0\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}\|y_n-y\|=0.$$

Alors on a $\lim_{n\to+\infty}\langle x_n,y_n\rangle=\langle x,y\rangle$.

Définition 6. *Deux éléments x et y d'un espace pré-hilbertien E sont dits orthogonaux si $\langle x,y\rangle=0$. Dans ce cas, on note $x\perp y$.*

L'orthogonal d'une partie A de E est, par définition, l'ensemble formé des éléments orthogonaux à tous les éléments de A. On la note $A^\perp$.

Remarque 7. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels fermés. On a de plus $(\overline{A})^\perp=A^\perp=\mathrm{Vect}(A)^\perp$, et $A\subset B\Longrightarrow B^\perp\subset A^\perp$.

Théorème 8. (Théorème de Pythagore)

Si x et y sont deux vecteurs orthogonaux de E, alors

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Définition 9. *Un espace pré-hilbertien complet pour la norme définie par son produit scalaire est appelé espace de* Hilbert.

Exemple 10. Tout espace pré-hilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

L'espace $L^2_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace de Hilbert, d'après le théorème de Riesz-Fischer.

1.2 Projection sur un convexe fermé

Soit $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle,\|\cdot\|)$ un espace de Hilbert.

Théorème 11. (de projection sur un convexe fermé)

Soit Γ une partie fermée, convexe, non vide de H. Alors pour tout point $x\in H$, il existe un unique point $y\in\Gamma$ tel que

$$\|x-y\|=\inf_{\gamma\in\Gamma}\|x-\gamma\|=d(x,\Gamma).$$

Ce point est appelé projection de x sur Γ et est noté $p_\Gamma(x)$. Il est caractérisé par la propriété suivante :

$$\begin{cases} p_\Gamma(x)\in\Gamma\\ \forall\gamma\in\Gamma\quad \mathfrak{Re}\langle x-p_\Gamma(x),\gamma-p_\Gamma(x)\rangle\leq 0\end{cases}.$$

Corollaire 12. *Sous les hypothèses du théorème 12, on a*

$$\forall(x_1,x_2)\in E^2\quad \|p_\Gamma(x_1)-p_\Gamma(x_2)\|\leq\|x_1-x_2\|.$$

En particulier, la projection sur Γ est une application 1-lipschitzienne, donc continue.

Application 13. Soit F un sous-espace vectoriel de H (non nécessairement fermé). Pour $x\in H$, le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F est caractérisé par :

$$\begin{cases} p_F(x)\in F\\ x-p_F(x)\in F^\perp\end{cases}$$

Par ailleurs, on a l'égalité :

$$H=\overline{F}\oplus(\overline{F})^\perp=\overline{F}\oplus F^\perp.$$

On en déduit un critère de densité pour un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert :

$$F\text{ est dense dans }H\Longleftrightarrow F^\perp=\{0\}.$$

Corollaire 14. *Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors $F=(F^\perp)^\perp$.*

Remarque 15. Si F est un sous-espace vectoriel de H de dimension finie $k \in \mathbb{N}^*$, on peut se donner une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$ de F. La projection orthogonale sur F s'écrit alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle \, e_i.$$

2 Bases hilbertiennes

Dans cette partie seulement, on considère que H est séparable, c'est-à-dire qu'il existe une partie dénombrable de H qui est dense dans H.

2.1 Définitions et théorèmes principaux

Définition 16. *On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de H est une base hilbertienne de H si elle est :*

1. *orthogonale : $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Longrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$,*
2. *normée : $\forall i \in I \quad \langle e_i, e_i \rangle = 1$,*
3. *totale : $H = \overline{\mathrm{Vect}(\{e_i \,:\, i \in I\})}$.*

Théorème 17. *H admet une base hilbertienne dénombrable.*

Remarque 18. Pour construire cette dernière, on considère une partie dénombrable totale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H. On peut supposer, à extraction d'une sous-suite près, que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre. On utilise alors le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, que l'on se propose de rappeler. On pose

$$f_1 = a_1 \quad \text{puis} \quad e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}.$$

Supposons définis la famille $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ orthonormée, et telle que $\mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. On pose

$$e_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{\|f_{n+1}\|} \quad \text{avec} \quad f_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle a_{n+1}, e_j \rangle \cdot e_j.$$

On vérifie alors que la famille $(e_j)_{1 \leq j \leq n+1}$ vérifie les relations souhaitées.

Exemple 19. Les suites $\mathbf{1}_n$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ définies par $\mathbf{1}_n(m) = \delta_{n,m}$ forment une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Théorème 20. *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne.*
2. *Pour tout $x \in H$, $\quad x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n$, i.e $\left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle x, e_n \rangle \right\| \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.*
3. *Pour tout $x \in H$, $\quad \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ (égalité dite de Parseval).*
4. *On a $\{e_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$.*

De plus, l'application $\mathcal{I} \colon \begin{cases} H & \mapsto & \ell^2(\mathbb{N}) \\ x & \mapsto & (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ *est une isométrie linéaire bijective.*

Remarque 21. Quand l'espace H est de dimension infinie, ce développement n'est pas un développement selon une base algébrique.

2.2 Application aux séries de Fourier

On se place sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et on note simplement λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{T}$.

Définition 22. *Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on définit le $n^{\text{ème}}$ coefficient de Fourier de f par*

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \, e^{-\mathrm{i}n\,t} \, dt.$$

On appelle série de Fourier associée (formellement) à f la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \, e^{int}$, et on note $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à cette dernière.

Théorème 23. *L'espace $L^2(\mathbb{T})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} \, dx$ est un espace de Hilbert, et la famille $(e^{in})_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.*

Corollaire 24. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors*

1. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \, dt$,
2. $f = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) \, e^{int}$, *la convergence étant au sens de la norme de $L^2(\mathbb{T})$,*
3. *l'application $f \in L^2(\mathbb{T}) \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est une isométrie linéaire bijective,*
4. *pour tout $g \in L^2(\mathbb{T})$, on a $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} \, dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$.*

Dans le cas où f est seulement intégrable sur $\mathbb{T}$ (voir même continue), les choses ne sont pas aussi simples.

Exemple 25. La fonction $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ définie par

$$f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\!\left[(2^{p^3} + 1) \cdot \frac{x}{2} \right]$$

est continue sur $\mathbb{T}$, mais sa série de Fourier diverge en zéro.

On a cependant le théorème suivant.

Théorème 26. (Critère de Dini).
Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ vérifiant une condition de Lipschitz au point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, c'est-à-dire telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{T} \quad |f(\theta) - f(\theta_0)| \leq |\theta - \theta_0|.$$

Alors la série de Fourier de f converge ponctuellement vers f en θ_0 : on a $S_N(f)(\theta_0) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} f(\theta_0)$.

2.3 Espace $L^2(I, \rho)$ et base hilbertienne de polynômes orthogonaux

Définition 27. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de poids sur I une application $\rho \colon I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n \, \rho(x) \, dx \; < \infty.$$

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions intégrales sur I par rapport à la mesure dont la densité est ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 28. *$L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ définit par*

$$\langle f,g\rangle_\rho=\int_I f(x)\overline{g(x)}\,\rho(x)\,dx.$$

Proposition 29. *Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires, orthogonaux deux à deux pour $\langle .,.\rangle_\rho$, tels que $\deg(P_n)=n$. Elle s'appelle la famille des polynômes orthogonaux associée à la fonction poids ρ.*

Théorème 30. **[Dev $n^0$1]**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction de poids sur I. On suppose de plus qu'il existe $\alpha>0$ tel que

$$\int_I e^{\alpha|x|}\,\rho(x)\,dx \quad<\quad \infty.$$

Alors la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux associée à ρ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

3 Dualité des espaces de Hilbert

3.1 Théorème de Riesz et applications

Théorème 31. (de représentation de Riesz).
Soit $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. Alors l'application δ définie par

$$\mathcal{L}\colon\begin{cases} H & \rightarrow & H' \\ a & \mapsto & \mathcal{L}_a=(x\mapsto\langle x,a\rangle)\end{cases}$$

est une bijection antilinéaire isométrique.

Remarque 32. Soit u un endomorphisme continu de H et $y\in H$. La forme linéaire $\langle u(\cdot),y\rangle$ est continue, donc d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $z\in H$ vérifiant

$$\forall x\in H\quad \langle u(x),y\rangle=\langle x,z\rangle.$$

Définition 33. *On appelle adjoint de l'endomorphisme continu $u\in\mathcal{L}(H)$ l'unique endomorphisme continu u^* de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant*

$$\forall(x,y)\in H^2\quad\langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(x)\rangle.$$

Théorème 34. (de Radon-Nikodym) **[Dev n°2]**
Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable et μ,ν deux mesures positives σ-finies sur $(X,\mathcal{A})$. Il y a équivalence entre :

1. *$\forall A\in\mathcal{A}\quad \mu(A)=0\Longrightarrow\nu(A)=0\quad$ (on note $\nu\ll\lambda$).*
2. *$\exists f\colon(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ intégrable telle que $\forall A\in\mathcal{A}\quad\nu(A)=\int_A f\,d\mu$.*

En outre, la fonction f est unique (à une égalité μ-presque partout près).
On note $f=\dfrac{d\nu}{d\mu}$ et on dit que f est la dérivée de Radon-Nikodym, ou la densité de ν par rapport à μ.

Application 35. Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, et X une variable aléatoire réelle sur Ω. On dit que la loi P_X de X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ si on a $P_X\ll\lambda$.
Dans ce cas, la fonction de répartition F_X de X s'écrit

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^t f_X(x)\,d\lambda(x),$$

où $f_X=\dfrac{dP_X}{d\lambda}$ est la dérivée de Radon-Nikodym de P_X par rapport à λ.

3.2 Notion de convergence faible

Définition 36. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H et $x\in H$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x, et on note $x_n\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}x$ lorsque*

$$\forall h\in H\quad\lim_{n\to+\infty}\langle h,x_n\rangle=\langle h,x\rangle.$$

Théorème 37. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace de Hilbert H et $x\in H$. On a alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\|x_n-x\|=0\implies x_n\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}x,$$
$$\Big(x_n\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}x\quad\text{et}\quad\lim_{n\to+\infty}\|x_n\|=\|x\|\Big)\implies\lim_{n\to+\infty}\|x_n-x\|=0.$$

De plus, si $x_n\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}x$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

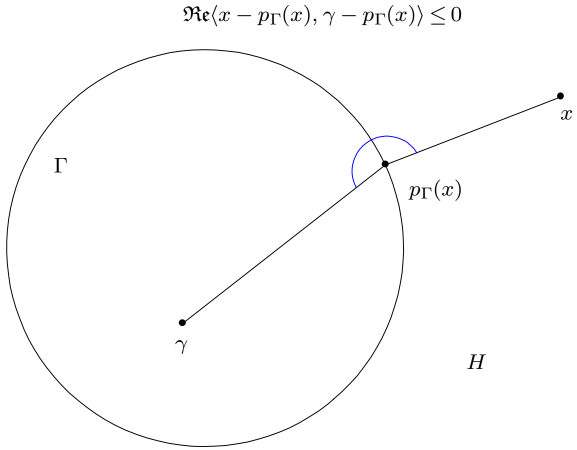
Exemple 38. Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de H. L'égalité de Parseval assure que pour tout $x\in H$, la suite $(\langle x,e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$. En particulier, elle converge vers zéro. On a donc $e_n\underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup}0$, mais pour autant, $\lim_{n\to+\infty}\|e_n\|=1$.

Le théorème suivant montre que la boule unité d'un espace de Hilbert, si elle n'est pas compacte pour la topologie définie à l'aide de la norme (d'après les conséquences du théorème de Riesz), l'est toutefois pour la topologie de la convergence faible.

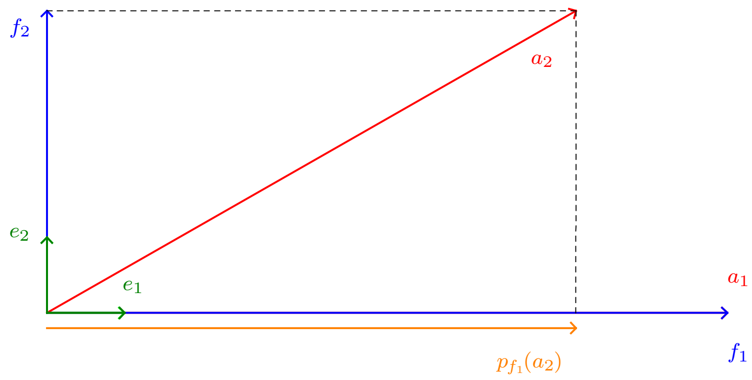
Théorème 39. (De compacité faible).
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'un espace de Hilbert séparable H. Alors on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente.

4 Annexe

1. Illustration géométrique du théorème de projection (théorème 11) :



2. Interprétation géométrique aux deux premières étapes de l'algorithme de Gram-Schmidt (remarque 18) :



5 Références

1. Beck, Vincent, Malick, Jérôme et Peyré, Gabriel. *Objectif Agrégation*. H&K, 2005.
2. Briane, Marc et Pagès, Gilles. *Théorie de l'intégration: Cours & Exercices*. Vuibert, 2006.
3. Chemin, Jean-Yves. *Analyse fonctionnelle*. Polycopié pour le M1 de Paris VI, 2017. URL : `https://www.ljll.math.upmc.fr/chemin/pdf/4M005_final_W.pdf`
4. Gourdon, Xavier. *Les maths en tête: Analyse*. Ellipse, 2008.
5. Hirsch, François et Lacombe, Gilles. *Élements d'analyse fonctionnelle*: cours et exercices avec réponses. Dunod, 2009.
6. Stein, Elias M et Shakarchi, Rami. *Fourier Analysis: An introduction*. Priceton University Press, 2003.