213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

I. Généralités

Soient $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Déf. 1 : Un produit scalaire (hermitien si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) est une forme sesquilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H \to \mathbb{K}$ hermitienne définie positive : pour $x,y,z\in H$ et $\alpha\in\mathbb{K}$:
$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$, $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
$\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$, $\langle x,\alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle$,
$\langle x,x\rangle \geq 0$ et $\langle x,x\rangle = 0$ si et seulement si $x=0$.
On dit alors que $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien.

Exm. 2 : $\mathbb{K}^n$ avec $\langle x,y\rangle = \sum x_k \overline{y_k}$
ou $L^2(\mathbb{R},\mathbb{K})$ avec $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\overline{g}$.

Rmq. 3 : $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est alors naturellement un EVN :
$$\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Prop. 4 : (Cauchy-Schwarz) Pour $x,y\in H$, $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Prop. 5 : (Parallélogramme) Pour $x,y\in H$:
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Exm. 6 : $(C^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ n'est pas préhilbertien.

Déf. 7 : Une suite (x_n) à valeurs dans H est de Cauchy si :
$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall p,q\geq N,\ \|x_p-x_q\|<\varepsilon.$$
$(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace de Hilbert si toute suite de Cauchy est convergente.

Exm. 8 : $L^2(\mathbb{R})$ est de Hilbert, $(C^0([0,1]),\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ non.

Déf. 9 : Deux éléments $x,y\in H$ sont orthogonaux si $\langle x,y\rangle=0$.
Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée si $\forall i,j\in I$, $\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij}$.
L'orthogonal d'une partie $A\subset H$ est le **sous-espace** :
$$A^\perp = \{y\in H \mid \forall x\in A,\ \langle x,y\rangle = 0\}.$$
Il est toujours fermé dans H.

Prop. 10 : Pour toute famille orthogonale finie $(e_i)_{i\in I}$:
$$\Big\|\sum_{i\in I} e_i\Big\|^2 = \sum_{i\in I}\|e_i\|^2.$$

II. Théorèmes classiques

Soit $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert.

Thm. 11 : (Projection sur un convexe fermé non-vide)
Soit C une partie convexe fermée non-vide de H.
1. Pour tout $x\in H$ il existe un unique $y\in C$ tel que
$$\|x-y\| = d(x,C) = \inf_{z\in C}\|x-z\|,$$
il est noté $p_C(x)$;
2. $p_C(x)$ est caractérisé par la propriété de l'angle obtus :
$p_C(x) \in C$ et $\forall z\in C$, $\mathrm{Re}\langle x-p_C(x), z-p_C(x)\rangle \leq 0$ dessin en annexe.

Rmq. 12 : p_C est 1-Lipschitzienne. Il suffit que C soit complet.

Cor. 13 : Si $C=F$ est un sous-espace vectoriel fermé, alors :
1. p_F est linéaire ;
2. Pour tout $x\in H$, $p_F(x)$ est caractérisé par :
$p_F(x)\in F$ et $x-p_F(x)\in F^\perp$.

Exm. 14 : Si $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ est un espace de proba. et $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ une sous-tribu, le théorème s'applique avec $H=L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ et $F=L^2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P}|_{\mathcal{G}})$. En notant $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = p_F(X)$, l'esp. conditionnelle est caractérisée par : $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\in L^2(\mathcal{G})$ et $\forall Y\in L^2(\mathcal{G})$, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Y\,\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$.

Rmq. 15 : Toutes les hypothèses sont importantes.
Par exemple $(C^0([0,1]),\|\cdot\|_\infty)$ est complet mais pas EPH.
On pose $C=\{f\in C^0([0,1]) \mid 0\leq f\leq 1 \text{ et } f(0)=0\}$.
La distance $d(1,C)$ est atteinte partout sur C.

Thm. 16 : (Théorème du supplémentaire orthogonal)
Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H.
Alors on dispose d'une décomposition :
$$H = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp.$$

Cor. 17 : Avec les mêmes notations, $F=(F^\perp)^\perp$.

Cor. 18 : (Critère de densité)
Un sous-espace vectoriel F de H est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

App. 19 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I\to\mathbb{R}_+^*$ mesurable telle qu'il existe $a>0$ avec $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < +\infty$.
On considère l'espace de Hilbert :
$$L^2_\rho = L^2(I,\rho dx) = \{f : I \xrightarrow{\text{mes.}} \mathbb{R} \mid \int_I f^2\rho < +\infty\}$$
avec $\langle f,g\rangle = \int_I fg\rho$. Alors $\mathbb{R}[X]$ est dense dans L^2_ρ.

Rmq. 20 : Toutes les hypothèses sont importantes.
Par exemple avec $H=(C^0([-1,1]),\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ qui n'est pas complet, le théorème du supplémentaire orthogonal est faux avec :
$$F=\{f\in H \mid f|_{[0,1]} = 0\}$$
qui est un sev fermé de H, pourtant
$$F^\perp = \{f\in H \mid f|_{[-1,0]} = 0\}$$
donc $F+F^\perp \subset \{f\in H \mid f(0)=0\} \neq H$.

Déf. 21 : Le dual H' de H est l'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}_c(H,\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ des formes linéaires continues.

Thm 22 : (Théorème de représentation de Riesz)
Soit $\phi \in H'$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que $\phi = \langle \cdot, u \rangle$. De plus $\|\phi\|_{H'} = \|u\|_H$, donc $H \longrightarrow H'$, $u \mapsto \langle \cdot, u \rangle$ est une isométrie.

App. 23 : Pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$ il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$ (l'adjoint de T) tel que pour tous $x, y \in H$:
$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle.$$
De plus, $\|T^*\| = \|T\|$.

Exm. 24 : Pour $K \in L^2([0,1]^2)$ on dispose d'un opérateur :
$$T_K : f \longmapsto \int_0^1 K(\cdot, y) f(y)\, dy$$
linéaire continu sur $L^2([0,1])$. Son adjoint est $T_K^* = T_{K^*}$ avec $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$.

Rmq. 25 : Les hypothèses sont importantes.
Par exemple avec $H = (C^0([0,1]), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ qui n'est pas complet, on pose :
$$\phi : f \longmapsto \int_0^{1/2} f = \langle f, \mathbb{1}_{[0,1/2]} \rangle_{L^2}.$$
Alors ϕ ne peut pas être représentée pourtant $\phi \in H'$.

Déf. 26 : On note $H^1(0,1) = \{ u \in L^2 \mid \exists v \in L^2, \forall \varphi \in C_c^\infty, \int_0^1 v\varphi = -\int_0^1 u\varphi' \}$
l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur $[0,1]$, muni de :
$$\langle u, u' \rangle_{H^1} = \langle u, u' \rangle_{L^2} + \langle v, v' \rangle_{L^2}.$$

Rmq. 27 : Dans la définition, v est la dérivée au sens des distributions de u, que l'on note u'.

Prop. 28 : $(H^1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$ est un espace de Hilbert, et tout $u \in H^1$ admet un représentant continu.

Déf. 29 : On note $H_0^1 = \overline{C_c^\infty(]0,1[)}^{H^1}$. Comme il est fermé dans H^1, c'est aussi un espace de Hilbert.

Prop. 30 : $H_0^1 = \{ u \in H^1 \mid u(0) = u(1) = 0 \}$.
(Inégalité de Poincaré) Pour tout $u \in H_0^1$,
$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\pi} \|u'\|_{L^2}$$
et la constante $1/\pi$ est optimale.

Thm. 31 : (Théorème de Lax-Milgram)
Soient H un espace de Hilbert réel, $\phi \in H'$ et $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive (il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in H$, $a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$). Alors il existe un unique $u \in H$ tel que $\phi = a(u, \cdot)$. Si de plus a est symétrique alors u est l'unique élément de H réalisant le minimum :
$$\min_{u \in H} \frac{1}{2} a(u,u) - \phi(u).$$

App. 32 : Soient $\alpha \in L^\infty(]0,1[)$ avec $0 < \alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$, $f \in L^2(]0,1[)$ et $\beta \in C^1(]0,1[)$ telle que $\beta' \leq 2$.
Alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1$ à l'équation elliptique :
$$\begin{cases} -(\alpha u')' + \beta u' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$
c'est-à-dire que pour tout $v \in H_0^1$:
$$\int_0^1 [\alpha u' v' + (\beta u' + u) v] = \int_0^1 f v.$$

DVP1

III Bases hilbertiennes

Déf. 33 : Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de H est totale si : $H = \overline{\mathrm{Vect}(e_i : i \in I)}$.
Une base hilbertienne est une famille orthonormée totale.

Exm 34 : En notant δ_n la suite valant 0 partout sauf en $n \in \mathbb{N}$ où elle vaut 1, $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.
En notant $\psi = \mathbb{1}_{[0,1/2[} - \mathbb{1}_{[1/2,1[}$, la famille $(\psi_{n,k} : x \mapsto 2^{n/2} \psi(2^n x - k))_{n,k \in \mathbb{N}, k < 2^n}$ des ondelettes de Haar est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$.

Exm 35 : On note D_1 le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, λ la mesure de Lebesgue et :
$$L_a^2(D_1) = L^2(D_1, \lambda) \cap \mathcal{H}(D_1)$$
l'espace de Bergman des fonctions holomorphes et de carré intégrable sur D_1, muni du produit hermitien de L^2 : $\langle f, g \rangle = \int_{D_1} f \bar{g}\, d\lambda$.

DVP2

Alors $(L^2_a(D_1), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ est un espace de Hilbert, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$ en est une base hilbertienne, et en notant $K : \begin{array}{l} D_1^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (z,w) \longmapsto \frac{1}{\pi(1-z\bar{w})^2} \end{array}$, on a $f = \int_{D_1} f(w) K(\cdot,w)\, d\lambda(w)$ pour tout $f \in L^2_a(D_1)$ (i.e. $T_K = id$, cf. Exm. 24).

Prop. 36 : Soient $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée finie et $F = \mathrm{Vect}(e_i : i\in I)$. Alors pour tout $x\in H$, on a :
$$p_F(x) = \sum_{i\in I} \langle x,e_i\rangle e_i$$
et $\|x\|^2 = \|x - \sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle e_i\|^2 + \sum_{i\in I} |\langle x,e_i\rangle|^2$.

Cor. 37 : (Inégalité de Bessel) Soient $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée. Alors pour tout $x\in H$:
$$\sum_{i\in I} |\langle x,e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Thm. 38 : (Bessel - Parseval) Soient $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée. Alors sont équivalents :
1. $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H ;
2. (Égalité de Bessel) $\forall x\in H$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x,e_i\rangle|^2$;
3. $\forall x,y\in H$, $\langle x,y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x,e_i\rangle\langle e_i,y\rangle$.

Dans ce cas, $x\mapsto (\langle x,e_i\rangle)_{i\in I}$ définit une isométrie linéaire injective $H \longrightarrow \ell^2(I)$, qui est surjective si et seulement si H est de Hilbert.

App. 39 : Un espace préhilbertien est séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable.

Déf. 40 : Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un EVN $(E,\|\cdot\|)$ est sommable s'il existe $X\in E$ (alors noté $\sum_{i\in I} x_i$) tel que :
$\forall \varepsilon>0\ \exists J \overset{\text{finie}}{\subset} I\ \forall K \overset{\text{finie}}{\subset} I,\ J\subset K \Rightarrow \|X - \sum_{i\in K} x_i\| < \varepsilon$.

Thm 41 : Soient $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de H. Alors $(\langle x,e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable et $x = \sum_{i\in I} \langle x,e_i\rangle e_i$ pour tout $x\in H$.

Exm. 42 : On note $C_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodiques muni du produit scalaire $L^2(0,2\pi)$: $(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g}$. Alors $(e_n : x\mapsto e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ en est une base hilbertienne, donc pour tout $f\in C_{2\pi}$ on a :
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e_n$.
En général la convergence des séries de Fourier n'a pas lieu uniformément. Comme $C_{2\pi}$ n'est pas complet, l'isométrie $f\in C_{2\pi} \longmapsto (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ n'est pas surjective. Cela marche parfaitement avec $L^2(]0,1[)$ qui est complet.

Prop. 43 : (Orthonormalisation de Gram - Schmidt) Soient $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un EPH, $N = [\![0,p]\!]$ ou $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in N}$ une famille libre de H. Alors il existe une unique famille orthonormée $(e_n)_{n\in N}$ telle que :
1. $\mathrm{Vect}(e_0,\dots,e_n) = \mathrm{Vect}(x_0,\dots,x_n)$ pour tout $n\in N$;
2. $\langle e_n, x_n\rangle > 0$ pour tout $n\in N$. $\boxed{\text{dessin en annexe.}}$

App. 44 : Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si et seulement s'il est isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$.

IV. Opérateurs compacts et théorème spectral

Soit $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert.

Déf. 45 : Un opérateur $T\in\mathcal{L}_c(H)$ est compact si $\overline{T(B(0,1))}$ est compact.

Exm. 46 : Tout opérateur de rang fini est compact.

Prop. 47 : Les opérateurs compacts sont exactement les limites dans $\mathcal{L}_c(H)$ de suites d'opérateurs de rang fini.

Déf. 48 : Soit $T\in\mathcal{L}_c(H)$. On note $\sigma(T) = \{\lambda\in\mathbb{C} \mid T-\lambda Id \text{ n'est pas bijectif}\}$ le spectre de T. Si $T-\lambda Id$ n'est pas injectif, on dit que λ est valeur propre de T et tout élément non nul de $\mathrm{Ker}(T-\lambda Id)$ est un vecteur propre correspondant.

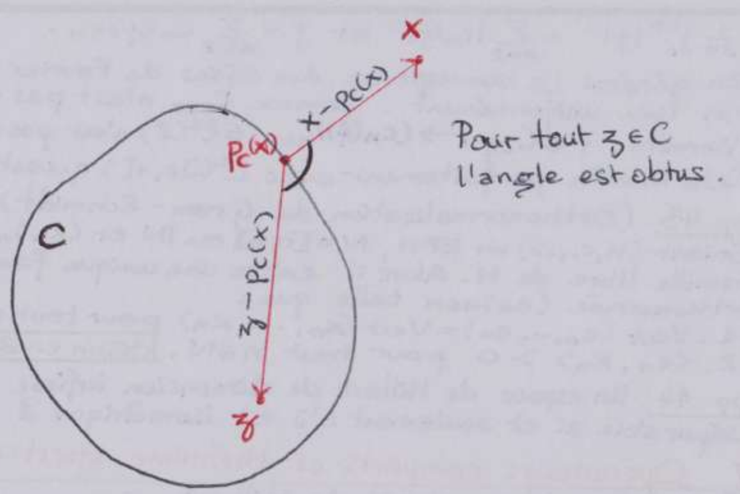
Def. 49. Un opérateur $T\in\mathcal{L}_c(H)$ est autoadjoint si $T^* = T$. Son spectre est alors inclus dans $\mathbb{R}$.

Prop. 50 : Soient $T\in\mathcal{L}_c(H)$ autoadjoint, et $m = \inf_{\|u\|=1}\langle Tu,u\rangle$ et $M = \sup_{\|u\|=1}\langle Tu,u\rangle$. Alors $\sigma(T)\subset[m,M]$, et $m,M\in\sigma(T)$.

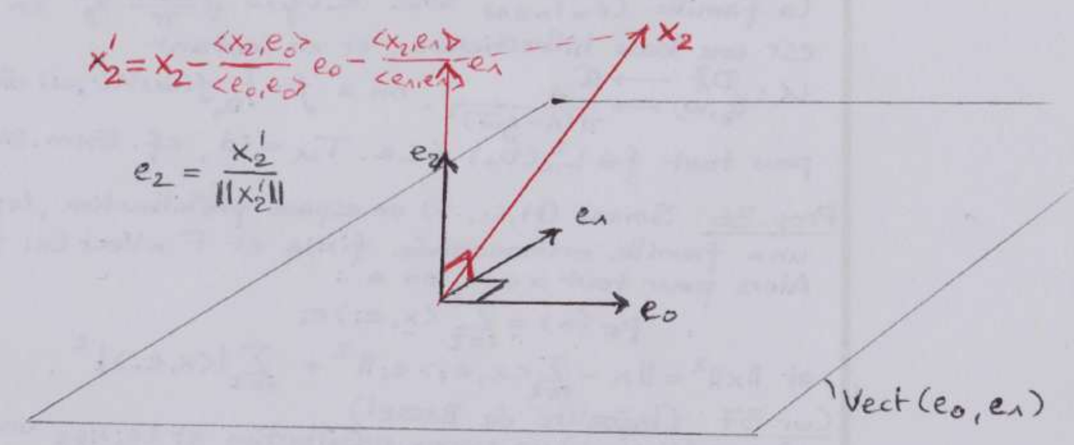
Thm 51 : (Théorème spectral) Si H est séparable et $T\in\mathcal{L}_c(H)$ est autoadjoint compact, alors H admet une base hilbertienne de vecteurs propres de T.

Exm. 52 : Pour $K\in L^2([0,1]^2)$, l'opérateur T_K (cf. exm. 24) est compact. Si pour tous $x,y\in[0,1]$ on a $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, alors T_K est autoadjoint. Comme $L^2([0,1])$ est séparable, le théorème spectral s'applique.

11. Projection sur un convexe fermé non-vide :



43. Orthonormalisation de Gram-Schmidt :



Bibliographie :

Hirsch F., Lacombe G. - Éléments d'analyse fonctionnelle

Brézis H. - Analyse fonctionnelle

Bernis J., Bernis L. - Analyse pour l'agrégation de mathématiques

Rudin W. - Analyse réelle et complexe

Beck V., Malick J., Peyré G. - Objectif Agrégation