Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites.
Exemples et applications.

214

I Les résultats principaux

1) Inversion locale et Fonctions implicites

[Rou] **Th 1 :** (Inversion locale)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
On suppose que $Df(a)$ est inversible.
Alors il existe V voisinage de a et W voisinage de $f(a)$ tels que $f_{|V}$ soit un C^1 difféomorphisme de V sur W.

Exemple : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$ est un C^1 difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

[Rou] **Th 2 :** (Fonctions implicites) [DEV]

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(0,0) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1.
On suppose $f(0,0) = 0$ et $D_y f(0,0)$ inversible. Alors il existe $r > 0$ et $s > 0$ et une unique application $\varphi : B(0,r) \to B(0,s)$ tels que :

$$(x \in B(0,r),\ y \in B(0,s) \text{ et } f(x,y)=0) \iff (x \in B_r \text{ et } y = \varphi(x))$$

De plus φ est de classe C^1 sur $B(0,r)$

[Rou] **Exemple :** Le folium de Descartes d'équation $x^3+y^3-3xy=0$ se paramètre de fonction implicite en tout point $\neq$ de $(0,0)$

Remarque 1 : En réalité $D_y f(x,y)$ est inversible sur $B(0,r) \times B(0,s)$ ce qui permet de calculer $D\varphi(x) = -D_y f(x,\varphi(x))^{-1} \circ D_x f(x,\varphi(x))$

Remarque 2 : Dans les deux théorèmes, on peut remplacer C^1 par C^k.

Remarque 3 : Les deux théorèmes sont en fait équivalents

2) Résultats liés

Prop 3 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $\forall x \in U$, $Df(x)$ soit inversible. Alors f est ouverte [GOU]

Th 4 : (inversion globale)
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
On suppose que f est injective sur U et que $\forall x \in U$, $Df(x)$ est inversible.
Alors f est un C^1 difféomorphisme de U sur $f(U)$

Contre-exemple : $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2-y^2, 2xy)$ n'est pas un C^1 difféomorphisme global

Application : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est C^1 et que $\varphi = f - Id$ est k-contractante $(0<k<1)$ alors f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. [GOU]

Th 5 : (Inversion globale holomorphe)
Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe [ROU]
Si f est injective sur U alors f est difféomorphisme holomorphe de U

Th 6 : (Changement de coordonnées)
Soient $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $a \in \mathbb{R}^n$. [ROU]
Les relations $u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$ définissent un changement de coordonnées au voisinage de a si et seulement si $Df_1(a), \dots, Df_n(a)$ sont indépendantes.

Exemple : le passage en coordonnées polaires $(x,y) \mapsto (r,\theta)$ définit bien un changement de coordonnées sur $\{(x,y) / x > 0\}$

Application : Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Th 7 : (Rang constant)
Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1. [ROU]
On suppose que $\forall x \in U$, $rg(Df(x)) = r$.
Alors il existe un changement de coordonnées au voisinage de a et un au voisinage de $f(a)$ tel que f se transforme en l'application linéaire $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans les nouvelles coordonnées.

[ROU] **Th 8 :** (Hadamard - Lévy)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
Il y a équivalence entre :
(i) f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ est inversible et f est propre (ie $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^n$, $f^{-1}(K)$ est compact)

II Application en algèbre et géométrie

1) Algèbre linéaire

[ROU] **Def 9 :** Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{N}$.
V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d si $\forall a \in V$, $\exists U$ voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, $\exists F$ C^1 difféomorphisme de U dans $F(U)$ voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$F(V \cap U) = \mathbb{R}^d \cap F(U)$$

Exemples : • La Sphère S^n est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimension n
• le cône $\{(x,y,z) / x^2+y^2-z^2=0\}$ n'est pas une sous-variété

[MNE] **prop 10 :** Soit $f : E \to F$ de classe C^1 avec $\dim E = n$, $\dim F = p$
Soit $y \in F$ et $V = f^{-1}(y)$.
On suppose que $\forall a \in V$, $df(a)$ est surjective. Alors V est une sous-variété de F de dimension $n-p$.

Cor 11 : (i) $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$
(ii) $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1

[MNE] **Prop 12 :** L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to GL_n(\mathbb{K})$ réalise un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un voisinage de I_d dans $GL_n(\mathbb{K})$

Applications :
• On peut définir un logarithme matriciel sur un voisinage de l'I_d
• surjectivité de l'exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$
• Il n'existe pas de sous-groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ arbitrairement petits, ie : il existe V voisinage de I dans $GL_n(\mathbb{K})$ tel que le seul sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ contenu dans V soit $\{I_d\}$. [MNE]

[OA] **prop 13 :** Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si A est suffisamment proche de I_d, alors $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$

[MNE] **Th 14 :** (Cartan - Von Neumann)
Tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) Champs de Vecteurs

Def 15 : On appelle champ de vecteurs une application $v : U \to \mathbb{R}^n$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$

[ROU] **prop 16 :** (Redressement d'un champ de vecteurs)
Soit v un champ de vecteur de classe C^1 défini sur un voisinage ouvert de 0.
Soit $x \in U$ et y la solution du système différentiel :

$$(S) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = v(y) \\ y(0) = x \end{cases}$$

Si $v(0) \neq 0$ alors il existe un changement de coordonnées $y = f(Y)$ au voisinage de 0 qui transforme (S) en $\begin{cases} \frac{dY}{dt} = V \\ Y(0) = f^{-1}(x) \end{cases}$ avec $V = (1, 0, \dots, 0)$

[GT] **Th 17 :** (Boule chevelue)
Soit $n \geq 3$, impair.
Alors tout champ de vecteurs continu v de S^{n-1} dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in S^{n-1}$, $\langle v(x), x \rangle = 0$ s'annule en au moins un point.

III Applications en analyse

1) Etude des extremas

[GOU] **Th 18** : (Extrémas liés)

Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$.
On pose $\Gamma = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$
Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $Dg_1(a), \dots, Dg_r(a)$ sont indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Df(a) = \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_r Dg_r(a)$$

Les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ s'appellent les multiplicateurs de Lagrange

Applications :

[OA] • Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

[ROU] • inégalité de Hadamard :

$\forall v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \dots \|v_n\|$

[GOU] • inégalité arithmético géométrique :

$\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$, $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

[ROU] **Th 19** : (Lemme de Morse)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3 avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in U$.
On suppose que $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ non dégénérée de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un C^1 difféomorphisme $\varphi : \begin{array}{l} V \to W \\ x \mapsto u \end{array}$ avec V et W voisinages de l'origine tel que :

$\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in V$, $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$

Application : [OA]

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^3 avec $Df(0) = 0$ et $D^2f(0)$ définie positive. Alors 0 est minimum local de f.

2) EDP

[ROU] • Equations de Burgers :

Soit $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1
On cherche à résoudre le système suivant :

$$(S) \begin{cases} a(u) \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

avec $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Pour résoudre ce système on introduit le système différentiel caractéristique associé :

$$(SC) \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(z) \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \\ x(0) = s, \ y(0) = 0, \ z(0) = f(s) \end{cases}$$

On trouve alors une relation implicite entre x, y et z indépendante de s et t : $F(x, y, z) = z - f(x - y a(z))$
Cela permet d'exprimer implicitement z comme fonction de x, y : $z = u(x, y)$
On a alors u qui est solution de (S)