214 Théorème d'inversion locale. Théorème des fonctions implicites. exemples et applications.

I Théorèmes généraux [ROU]

1) Définitions

déf : Soient U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$. $f : U \to V$ est un C^n-difféomorphisme ssi f est C^n sur U, bijective et f^{-1} est C^n sur V.

déf : Soient U, V ouverts connexes de $\mathbb{C}$. $f : U \to V$ est un biholomorphisme ssi f est holomorphe sur U, bijective et f^{-1} holomorphe sur V.

2) Théorèmes d'inversion et conséquences.

thm (Inversion locale) : (DEV)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$.
Si $\det D_a f \neq 0$, il existe un voisinage V de a dans U et W voisinage de $f(a)$ tels que $f|_V : V \to W$ soit un C^k-difféomorphisme

rmq :
- $(x \in V$ et $y = f(x)) \iff (y \in W$ et $x = f^{-1}(y))$
- On n'a pas nécessairement $V = U$
- $\forall x \in V, \quad D_{f(x)} f^{-1} = (D_x f)^{-1}$

thm (Inversion globale)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$ injective tel que $\forall x \in U$, $\det D_x f \neq 0$. Alors $f(U)$ est ouvert et f est un C^k-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

ex : $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$ f est C^1, $\det D_{(r,\theta)} f = r \neq 0$ et f injectif

Donc f est un C^1-difféomorphisme sur son image

thm (Inversion globale holomorphe)

Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe injectif. Alors $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est un biholomorphisme de U sur $f(U)$.

rmq :
- on n'a pas besoin d'hypothèse sur f'
- Dans le théorème d'inversion globale, montrer l'injectivité ou calculer $f(U)$ revient souvent à expliciter f^{-1}

thm (Hadamard Lévy) : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Sont équivalentes :
- f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- f est propre et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\det D_x f \neq 0$

thm (Différentielle de rang constant).

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 tel que $r := \operatorname{rg} D_x f$ ne dépende pas de x. Soit A une application linéaire de matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Alors $\forall a \in U$, il existe un voisinage V de a dans U et $\varphi : V \to \varphi(V)$, $\psi : A\varphi(V) \to f(V)$ deux C^1-difféomorphismes tels que $\forall x \in U$, $f(x) = \psi(A(\varphi(x)))$.

3) Théorème des fonctions implicites et conséquences.

thm : Soit $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ouvert, $(a, b) \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe C^k

Si $f(a, b) = 0$ et $\det D_y(f(a, \cdot)) \neq 0$, il existe V voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage de b dans $\mathbb{R}^p$ avec $V \times W \subset U$ et un unique $\varphi : V \to W$ de classe C^k tel que
$((x, y) \in V \times W, f(x, y) = 0) \iff (x \in V$ et $y = \varphi(x))$

ex : $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. $f(x, y) = 0 \iff y = \sqrt{1 - x^2}$ au voisinage de $(0, 1)$.

rmq :
- $\forall x \in V, \quad D\varphi(x) = -\left(D_y f(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ \left(D_x f(x, \varphi(x))\right)$
- le théorème d'inversion locale peut se déduire du théorème des fonctions implicites et réciproquement
- On a une version holomorphe en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et C^k par holomorphe

thm (Extrema liés) : Soit $f, g_1 \cdots g_p$ C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

Soit $X = \{x, \forall i\ g_i(x) = 0\}$.
Si $f|_X$ admet un extremum en a et si $(D_a g_1 \cdots D_a g_p)$ est libre, $\exists! (\lambda_1 \cdots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $D_a f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i D_a g_i$.

II Applications

1) Résultats sur les polynômes [OA] [ROU]

thm : Soit P_0 un polynôme, x_0 une racine simple de P_0. Alors il existe U voisinage de P_0 dans $\mathbb{R}_{\deg P_0}[X]$, V voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\varphi : U \to V$ de classe C^∞ telle que $\forall P \in U, x \in V$:

$$P(x) = 0 \iff x = \varphi(P)$$

prop : L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples est ouvert.

prop : On considère l'équation $x^3+px+q=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f : (p,q,x) \mapsto x^3+px+q$ est C^1 et définit la surface S d'équation $\{f=0\}$. L'ensemble des points de S où on ne peut pas appliquer le théorèmes des fonctions implicites pour avoir $x = \varphi(p,q)$ vérifie $4p^3+27q^2=0$ et $x = \sqrt[3]{q/2}$.

2) Résultats matriciels [OA][MT][GOU]

prop : Soit $k \geq 1$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si A est assez proche de I_n, il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^k$. De plus, $\varphi : A \mapsto B$ est C^∞ sur un voisinage de I_n

def : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. L'exponentielle de A est la somme de la série normalement convergente $e^A = \sum_{n \geq 0} A^n/n!$

prop : $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ est une application C^∞. De plus, $D_0 \exp = Id$.

cor : exp réalise un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $M_n(\mathbb{R})$ sur un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$.

thm : $GL_n(\mathbb{R})$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit i.e. il existe V voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que l'unique sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ inclus dans V soit $\{I_n\}$.

prop : Tout endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ admet une valeur propre

cor : Tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable en base orthonormée

prop : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tel que $\forall x, h$, $\|D_x f(h)\| = \|h\|$. Alors f est une isométrie affine. (DEV)

3) Lemme de Morse et formes quadratiques [ROU].

prop : Soit $A_0 \in S_n^+(\mathbb{R})$. Toute forme quadratique A suffisamment proche de A_0 lui est équivalente, i.e. $\exists M \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = {}^tMA_0M$.

lemme (Morse) : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Si $D_0 f = 0$ et $D^2_{(0,0)} f$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$, alors il existe $\varphi : V \to W$ un C^1-difféomorphisme où V, W sont des voisinages de 0 tels que $\varphi(0) = 0$ et $\forall x \in V$

$$f(x) = f(0) + u_1(x)^2 + \dots + u_p(x)^2 - u_{p+1}(x)^2 - \dots - u_n(x)^2$$

où $\varphi(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$.

III Sous-variétés [ROU].

1) Définitions

def : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$ et $d \leq n$. On dit que V est lisse en a de dimension d ssi $\exists F : U \to F(U)$ un C^1-difféomorphisme avec U voisinage de a, F(U) voisinage de 0 tel que

$$F(V \cap U) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}^{n-d}) \cap F(U)$$

def : V est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ ssi $\forall a \in V$, V est lisse de dimension d en a.

ex :
- S^n est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$
- La courbe d'équation $y = |x|$ n'est pas lisse (en (0,0))
- La surface d'équation $x^2+y^2=z^2$ n'est pas lisse en (0,0,0)

rmq : L'image d'une sous-variété de dimension d par un C^k-difféomorphisme est une sous-variété de dimension d.

2) Le théorème des sous-variétés.

thm : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f_1 \cdots f_p : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Soit $V = \{x \,/\, \forall i,\ f_i(x) = 0\}$. Si $\forall x$ $(D_x f_1 \cdots D_x f_p)$ sont indépendants, V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-p$.

thm (des sous-variétés) : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$ et $d \leq n$. Sont équivalents :

(1) V est lisse en a, de dimension d

(2) $\exists U$ voisinage de a et $n-d$ fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ C^1 telles que
$$x \in V \cap U \iff x \in U \text{ et } \forall i,\ f_i(x) = 0$$
et $(D_a f_1 \cdots D_a f_p)$ sont indépendantes

(3) $\exists U$ voisinage de a, U' voisinage de $(a_1 \cdots a_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ et $n-d$ fonctions $g_i : U' \to \mathbb{R}$ C^1 telles que
$$x \in V \cap U \iff (x_1 \cdots x_d) \in U' \text{ et } \forall i\ x_{d+i} = g_i(x_1 \cdots x_d).$$

(4) $\exists U$ voisinage de a, Ω voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et n fonctions $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1 tel que $\varphi : (u_1 \cdots u_d) \mapsto (\varphi_1(u) \cdots \varphi_n(u))$ soit un homéomorphisme de Ω sur $V \cap U$ avec $a = \varphi(0)$ et $D_0\varphi$ injective de rang d.

rmq : • (2) $\Rightarrow$ (3) provient du théorème des fonctions implicites
• (4) $\Rightarrow$ (3) provient du théorème d'inversion locale

3) Plan tangent.

déf : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$, $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent à V en a ssi $\exists \gamma : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable sur $I \ni 0$ intervalle tel que $\gamma(I) \subset V$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$

thm : Si V est lisse en a, ses vecteurs tangents en a forment un sous-espace vectoriel de dimension d, appelé espace tangent à V en a, noté $T_a V$. d est la dimension de V

thm : • Si V est de la forme (2), $T_a V = \operatorname{Ker} D_a f$ où $f = (f_1 \cdots f_{n-d})$
• Si V est de la forme (3), $T_a V$ est le graphe de $D_{(a_1 \cdots a_d)} g$ où $g = (g_1 \cdots g_{n-d})$.
• Si V est de la forme (4), $T_a V = \operatorname{Im} D_0 \varphi$ où $\varphi = (\varphi_1 \cdots \varphi_n)$

rmq : Le théorème des extrema liés assure que $T_a X = \bigcap \operatorname{Ker} D_a g_i \subset \operatorname{Ker} D_a f$. Autrement dit, X est une sous-variété et $D_a f|_{T_a X} = 0$

4) Exemples de sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$ [MT]

prop : $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert, c'est une sous-variété de dimension n^2 de $M_n(\mathbb{R})$

prop :
• $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n^2-1.
$T_{I_n} SL_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$
• $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n^2-n}{2}$
$T_{I_n} O_n(\mathbb{R})$ est A_n, l'ensemble des matrices antisymétriques

Refs :

[GOU] X. Gourdon - Les maths en tête . Analyse

[ROU] Rouvière

[OA] Objectif agregation

[MT] Mneimné - Testard .

Autres devs :

* Extrema liés
* TFI
* Hadamard-levy
* Morse
* certaines équivalences du thm des sous-variétés .