214

Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.
Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Prérequis : Notions de base du calcul différentiel, différentielles, applications de classe C^k, théorème de différentiation des fonctions composées, difféomorphisme.

I- Théorème d'inversion locale :

I-1. Enoncé et premières conséquences :

Thm 1.1 : (Thm d'inversion locale)
Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de $\mathcal{U}$, et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application C^k. On suppose que la matrice jacobienne $Df(a)$ est inversible.
Alors f est un C^k-difféomorphisme d'un voisinage de a dans $\mathcal{U}$ sur un voisinage de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.2 : $g(x,y) \mapsto (e^x \sin y, e^x \cos y)$ est quoi ?

Application 1.3 : Il existe dans $GL_n(\mathbb{R})$ deux ouverts $\mathcal{U}, V$ contenant I_n tq pour tout $B \in V$, il existe $A \in \mathcal{U}$ tq $A^2 = B$.

Corollaire 1.4 : Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application C^1 de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que pour tout $a \in \mathcal{U}$, $Df(a)$ soit inversible. Alors f est une application ouverte.

Exemple 1.5 : (i) $f : x \mapsto x^2$ n'est pas ouverte sur $\mathbb{R}$.
(ii) $g : (x,y) \mapsto (e^x + e^{-y}, e^{x+y})$ est ouverte sur $\mathbb{R}^2$.

I-2. Applications en analyse :

Thm 1.6 : (Lemme de Morse) $\boxed{\text{DEV 1}}$
Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique associée à la matrice hessienne $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un C^1-difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tq $\varphi(0) = 0$ et :
$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

Exemple 1.7 : On peut étudier la position relative de la surface S d'équation $z = x^2 - y^2$ par rapport à son plan tangent en O.

Application 1.8 : En dimension 2, sous les hypothèses du Lemme de Morse, si $D^2f(0)$ est de signature $(+,-)$, la courbe de niveau $f(x,y) = f(0,0)$ admet un point double à l'origine et le couple des tangentes en $(0,0)$ a pour équation :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2 = 0.$$

Thm 1.9 : (Thm d'inversion globale)
Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une application C^k. On suppose que f est injective sur $\mathcal{U}$ et que $\forall x \in \mathcal{U}$, $Df(x)$ est inversible.
Alors $f(\mathcal{U})$ est un ouvert et f est un C^k-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $f(\mathcal{U})$.

Application 1.10 : Soit f une fonction holomorphe d'un ouvert connexe $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On suppose f injective. Alors f est biholomorphe sur son image.

Exemple 1.11 : $f : x \mapsto x^3$ et $g : (x,y) \mapsto (e^x \sin y, e^x \cos y)$ sont des contre-exemples.

Application 1.12 : (Thm d'Hadamard-Lévy, ADMIS)
Soit f une application C^k de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
(ii) f est propre et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $Df(x)$ est inversible.

I-3. Applications en algèbre linéaire :

Thm 1.13 :
L'application exponentielle réalise un difféomorphisme entre un voisinage de O dans $M_n(\mathbb{R})$ et un voisinage de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$.

Application 1.14 : Le groupe $GL_n(\mathbb{R})$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits.

Thm 1.15 : $\boxed{\text{DEV 2}}$
L'application exponentielle est surjective de $M_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$.

Def 1.16 : Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev de dimension n et m et $f : E \to F$ une application différentiable en $x_0 \in E$. Le rang de f en x_0 est le rang de sa différentielle en x_0.

Def 1.17 : Soient E, F, G, H des espaces normés et $f : E \to F$ et $g : G \to H$ des applications C^k. On dit que f est localement C^k conjuguée à g au voisinage de $x_0 \in E$ s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0, un voisinage V de $f(x_0)$, un ouvert $\tilde{\mathcal{U}}$ de G et un ouvert $\tilde{V}$ de H tq il existe deux C^k difféomorphismes $\varphi : \mathcal{U} \to \tilde{\mathcal{U}}$ et $\psi : V \to \tilde{V}$ tq $g \circ \varphi = \psi \circ f$.

Thm 1.18 : (Lemme de submersion)

Sous les hypothèses de la Def 1.16, soit $a \in E$, supposons $\operatorname{rang} f_a = m$. Alors $m \leqslant n$ et f est localement C^k-conjuguée au voisinage de a à la projection canonique p de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, définie par :

$$p(x_1, \dots, x_m, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

Thm 1.19 : (Lemme d'immersion)

Sous les hypothèses de la def 1.16, soit $a \in E$, supposons $\operatorname{rang} f_a = n$. Alors $n \leqslant m$ et f est localement C^k-conjuguée au voisinage de a à l'injection canonique i de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, définie par :

$$i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

Exemple 1.20 : (i) $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2$ est localement C^k-conjuguée à $p : (x,y) \longmapsto x$ au voisinage de tout $(x,y) \neq (0,0)$.

(ii) $g : (x,y) \longmapsto (x^2+y^2, \cos x, \sin y)$ est localement C^k-conjuguée à $i : (x,y) \longmapsto (x,y,0)$ au voisinage de $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Thm 1.21 : (Thm de rang constant)

Sous les hypothèses de la Def 1.15, soit $a \in E$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\exists$ un voisinage V de a tq f est de rang constant sur V

(ii) f est C^k-conjuguée localement en a à une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Exemple 1.22 : $f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto {}^tM.M$ est de rang $\frac{n(n+1)}{2}$ sur un voisinage de l'identité, donc f est C^k conjuguée localement en I_n à une application linéaire de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$.

II - Théorème des fonctions implicites :

II-1. Enoncé et premières conséquences :

Thm 2.1 : (Thm des fonctions implicites)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, $(a,b) \in U$, et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^k. On suppose que $f(a,b) = 0$ et que $D_y f(a,b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage V de a, un voisinage W de b, avec $V \times W \subset U$ et $D_y f(x,y)$ inversible $\forall (x,y) \in V \times W$ et une unique application C^1 $\varphi : V \longrightarrow W$ tq :

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x))$$

Exemple 2.2 : (Folium de Descartes) Soit $f : (x,y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$? oui,
On considère l'ensemble $\{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$.

Application 2.3 : Soit P_0 un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P_0. Alors il existe une application C^∞ φ, définie sur un voisinage U de P_0 à valeurs dans un voisinage V de x_0 tq :

$$\forall P \in U, \forall x \in V, x = \varphi(P) \Leftrightarrow P(x) = 0$$

Application 2.4 : L'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à n racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Application 2.5 : Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction C^k. Soit $(a,b) \in A$ tq $f(a,b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tq $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[$, l'équation $f(x,y) = 0$ possède une unique solution $y = \varphi(x)$ sur $]b-\beta, b+\beta[$. En dérivant $f(x, \varphi(x)) = 0$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) = 0$.

II-2. Thm des extremas liés :

Thm 2.6 : (Thm des extremas liés)

Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note Γ l'ensemble $\{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. On suppose que $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et que les formes linéaires $(D_{g_i}(a))_{i=1,\dots,r}$ sont linéairement indépendantes. Alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (appelés multiplicateurs de Lagrange) tq : $Df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i D_{g_i}(a)$.

Rmq 2.7 : Le plus souvent on utilise la contraposée de ce thm, afin de trouver des candidats pour des extremums.

Application 2.8 : (Inégalité arithmético-géométrique)

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Application 2.9 : (Inégalité d'Hadamard)

Soient $v_1, \dots, v_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors :
$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leqslant \|v_1\| \times \dots \times \|v_n\|$.

Application 2.10 : (Inégalité de Hölder)

Soient $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors : $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$

III - Géométrie différentielle :

III-1. Généralités :

Def 3.1 : (i) Soit f une application d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ de classe C^k. On dit que f est une immersion si sa différentielle est injective en tout point de U.

(ii) Soit f une application d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ de classe C^k. On dit que f est une submersion si sa différentielle est surjective en tout point de U.

(iii) Soit f une immersion. Si f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$ on dit que f est un plongement.

Rmq 3.2 : Si une application est à la fois une immersion et une submersion est un difféomorphisme local.

Def 3.3 : Soient V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$, et d un entier naturel. On dit que V est lisse en a, de dimension d, s'il existe un C^1-difféomorphisme F d'un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ sur le voisinage $F(U)$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$, qui transforme V en un sous-espace vectoriel de dimension d :

$$F(V \cap U) = V' \cap F(U) \text{ avec } V' = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

On dit que V est une sous-variété de dimension d et de codimension $n-d$ si V est lisse de dimension d en chacun de ses points.

Exemple 3.4 : (i) La sphère $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(ii) $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_d\}$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$

(iii) Le cône de révolution $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2=0\}$ n'est pas une sous-variété.

(iv) Une parabole est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.

(v) Le tore de dimension n $T^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2 - 1) = 0\}$ est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n}$.

Thm 3.5 : (Thm des sous-variétés)

Soit M une partie de $\mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M est une sous-variété de dimension p de $\mathbb{R}^n$

(ii) Pour tout a de M, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a et une submersion $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ tq $U \cap M = g^{-1}(\{0\})$.

(iii) Pour tout a de M, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ contenant 0, et une application $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ qui est à la fois une immersion dans $\mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme de Ω sur $U \cap M$.

(iv) Pour tout $a \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant a, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ contenant $(a^1, \dots, a^p)$ et une application C^∞ G de V dans $\mathbb{R}^{n-p}$ tq, après permutation éventuelle des coordonnées, $U \cap M$ soit égal au graphe de G.

III-2. Espace tangent :

Def 3.6 : Soient M une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in M$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent en a à M s'il existe une fonction dérivable $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ (où I est un intervalle ouvert contenant 0) telle que :

$$\gamma(I) \subset M, \gamma(0) = a \text{ et } \gamma'(0) = v.$$

Thm 3.7 : Si M est lisse en a, de dimension d, ses vecteurs tangents en a forment un sev de dimension d, appelé espace vectoriel tangent en a à M, noté V_aM.

Rmq 3.8 : L'espace affine tangent T_aM en a à M est l'espace affine parallèle à V_aM passant par a.

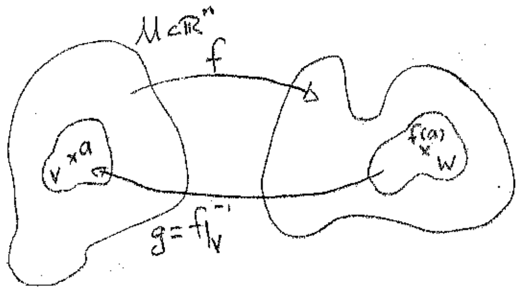
Rmq 3.9 : On peut ré-exprimer le thm des extremas liés en terme de sous-variétés :

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d, f une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage de M. Si $p \in M$ est tq $f(p)$ est un extremum local de $f|_M$, alors $Df(p)|_{T_pM} = 0$. En particulier, si $h = (h_1, \dots, h_{n-d})$ est une submersion tq $h^{-1}(\{0\}) = M$, alors :

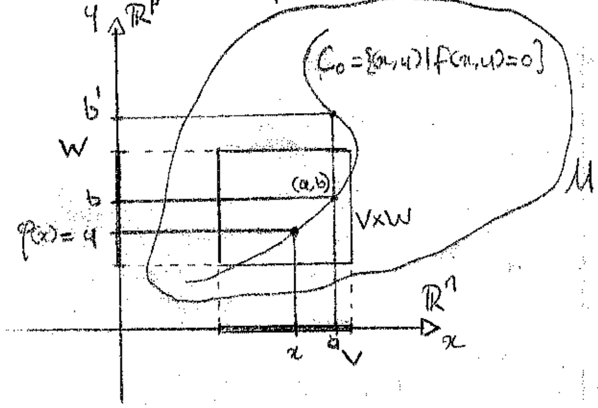
$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d} \text{ tq } \lambda_1 Dh_1(p) + \dots + \lambda_{n-d} Dh_{n-d}(p) = Df(p)$$

Exemple 3.10 : Le plan tangent à la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ en $(1,0,0)$ est le plan engendré par les vecteurs $(0,\pi,0)$ et $(0,0,\pi)$.

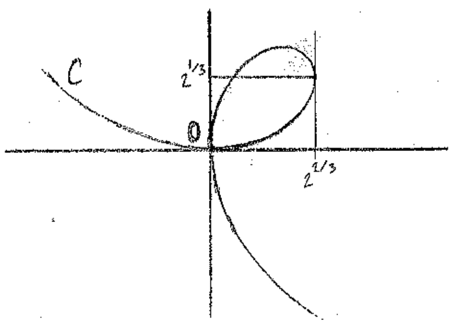
Annexe 1 : Thm d'inversion locale



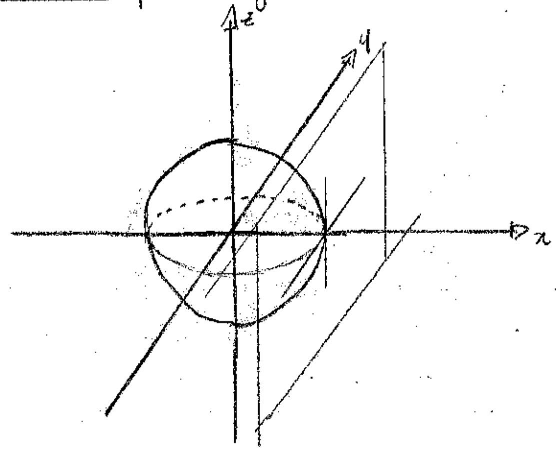
Annexe 2 : Thm des fonctions implicites



Annexe 3 : Folium de Descartes



Annexe 4 : plan tangent à $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ en $(1,0,0)$



Bibliographie :

(i) Petit Guide de calcul différentiel, Rouvière
(ii) Objectif Agrégation, Beck, Malick, Peyré
(iii) Introduction aux variétés différentielles, Lafontaine
(iv) L3 Analyse, Marco
(v) Groupes de Lie Classiques, Mneimné-Testard
(vi) Analyse, Gourdon
(vii) Topologie, calcul différentiel et variable complexe, Saint-Raymond
(viii) Un max de maths, Maxime Zavidovique

Théorème : (Lemme de Morse à n variables)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que 0 est un point critique quadratique non-dégénéré de f, càd que $Df(0)=0$ et que la forme quadratique hessienne $D^2f(0)$ est non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto u = \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tq $\varphi(0)=0$ et :

$$f(x)-f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 .$$

preuve :

- La formule de Taylor à l'ordre un avec reste intégral s'écrit au voisinage de 0 :

$$f(x)-f(0) = {}^t x\, Q(x)\, x$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique $Q(x) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)\,dt$, fonction C^1 de x. D'après le lemme il existe une matrice inversible $M(x)$, fonction C^1 de x au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, tq :

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)$$

d'où : $f(x)-f(0) = {}^t y\, Q(0)\, y$, avec $y = M(x)x$.

- Or $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, et il existe donc un chgt linéaire de coordonnées $y = Au$, où A est une matrice inversible, tq :

$${}^t y\, Q(0)\, y = {}^t u\, {}^t A\, Q(0)\, A u = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$$

De plus, l'application $x \mapsto u = A^{-1} M(x) x$ a pour différentielle à l'origine $A^{-1}M(0)$, matrice inversible. Par le thm d'inversion locale, c'est un difféomorphisme C^1 entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

Rouvière, Petit guide de calcul diff

Dev : Lemme de Morse

Lemme : (Réduction des formes quadratiques, version différentiable)
On note E l'espace des matrices réelles $n \times n$ et S le sous-espace des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S$, inversible. Soit $\varphi : E \to S$ l'application définie par :

$$\varphi(M) = {}^tM A_0 M$$

Alors il existe un voisinage V de A_0 dans S et une application $A \mapsto M$ de V dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe C^1 tq :

$$A = {}^tM A_0 M \quad \forall A \in V.$$

preuve :

· L'application φ est polynomiale, donc de classe C^1 sur E.
Pour $H \in E$ on a : $\varphi(I+H) - \varphi(I) = {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0H$
$= {}^t(A_0H) + A_0H + O(\|H\|^2)$

D'où : $D\varphi(I)H = {}^t(A_0H) + A_0H$.
Le noyau de l'application linéaire $D\varphi(I) : E \to S$ est donc formé des matrices H telles que A_0H soit antisymétrique.
Cette application est par ailleurs surjective : pour $A \in S$, on pose $H = \frac{1}{2}A_0^{-1}A \in E$ et on a $D\varphi(I)H = A$.

· Toute matrice étant, de manière unique, somme d'une symétrique et d'une antisymétrique, le sous-espace F de E formé des matrices M tq $A_0M \in S$ est un supplémentaire du noyau de $D\varphi(I)$ dans E ; de plus I appartient à F.

· Soit $\psi : F \to S$ la restriction de φ à F. La différentielle $D\psi(I)$, restriction à F de $D\varphi(I)$, est bijective puisque $\ker D\varphi(I) \cap F = 0$.
Par le thm d'inversion locale il existe un voisinage ouvert U de I dans F (qu'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles) tq ψ soit un difféomorphisme de classe C^1 de U sur $V = \psi(U)$.
Ainsi V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I) = \varphi(I)$ dans S et, $\forall A \in V$, il existe une unique matrice inversible $M \in U$ tq $A = {}^tMA_0M$ et $M = \psi^{-1}(A)$ est fonction continûment différentiable de A.